Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Rodrigo Melo Matos da Costa

Matemática Financeira na Escola e na Vida

Teresina - 2021

Rodrigo Melo Matos da Costa

Dissertação de Mestrado:

Matemática Financeira na Escola e na Vida

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Kelton Silva Bezerra

Teresina - 2021

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Serviço de Processamento Técnico

C837m Costa, Rodrigo Melo Matos da.
Matemática Financeira na escola e na vida / Rodrigo Melo Matos da Costa. – 2021.
190 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática/PROFMAT, Mestrado em Matemática, Teresina, 2021.
"Orientador: Prof. Dr Kelton Silva Bezerra."

1. Matemática financeira – Estudo e ensino. 2. Matemática financeira – Programas de computador. 3. HP12C (Máquina de calcular). I. Título. CDD: 513.93

Bibliotecária: Ana Cristina Guimarães Carvalho CRB 3/1087

Rodrigo Melo Matos da Costa

Matemática Financeira na Escola e na Vida

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 14/10/2021.

BANCA EXAMINADORA

Kelton Silva Bezerra

Prof. Dr. Kelton Silva Bezerra (Orientador)

Universidade Federal do Piauí

Manoel Vieira de Matos Neto

Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto

Universidade Federal do Piauí

Ailton Campos do Nascimento

Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento

Universidade Federal do Ceará

Teresina - 2021

Dedico esta dissertação à minha família, aos meus amigos, aos meus professores e alunos, mas, em geral, a todos que desejam aprender um pouco mais da Matemática Financeira.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir ter saúde e paz para que, do resto, eu corresse atrás.

Agradeço em seguida à minha esposa Priscyla, aos meus filhos João e Sara, à minha mãe Elsa, ao meu pai João Marivaldo (*in memoriam*), à minha madrinha e tia Taline, ao meu irmão Victor, aos meus compadres Diego e Michele, aos meus sogros professor Barbosa e dona Sandra, à minha chefe e amiga Sula, bem como a todos familiares e amigos que, direta ou indiretamente, com recursos financeiros, técnicos ou afetivos, presencialmente ou à distância, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço muitíssimo a cada profissional envolvido no PROFMAT, desde o zelador Diniz pelo esmero no cuidado do ambiente físico da UFPI, até a equipe de professores e coordenadores, pelo aprendizado magistral e por todo esforço em viabilizar a continuidade do curso na modalidade à distância, implementada às pressas devido à crise do Covid-19.

Destes profissionais preciso externar um sentimento mais profundo de gratidão aos professores Carlos Humberto, Ítalo Dowel e Kelton Bezerra. Ao primeiro, pelas "mesas redondas" em aulas sempre descontraídas e pelo apoio constante, decorrente da sua singularidade empática. Ao segundo, pela competência com que substituiu o igualmente competente professor João Carlos na coordenação do curso. Ao terceiro, mas não menos importante, pelas orientações imensuráveis e pela eterna disponibilidade.

Agradeço especialmente ao professor Sérgio, recém concludente do PROFMAT, pelo auxílio técnico gratuito, sem o qual não teria sido possível concluir este curso.

Agradeço ainda a cada colega mestrando pelo companheirismo, compartilhamento de ideias, apoio e críticas construtivas. Entre eles, destaco os professores Ítalo André, Gerson, Dalton, "Lobo", Erimar, Zé Augusto, Rodolfo e Leo Da Vince.

Encerro estas declarações, dizendo que o verdadeiro agradecimento não passa pelas palavras e sim pelas ações. Por isto, me dediquei ao máximo para a realização deste curso, culminando no presente trabalho, que, entre outras finalidades, esperamos servir de base para aspirações literárias futuras.

"*Quem aumenta sua fortuna por usuras e logro, ajunta para quem tem piedade dos pequenos.*"

Provérbios 28: 8 (BÍBLIA, 2016)

"*A propriedade privada dos fatores materiais de produção não representa uma restrição na liberdade de todas as outras pessoas poderem escolher o que melhor lhes convém. Representa, ao contrário, o mecanismo que atribui ao homem comum, na condição de consumidor, a supremacia em todos os campos econômicos. É o meio pelo qual se estimula os indivíduos mais empreendedores de um país a empenhar a melhor de suas habilidades a serviço de todas as pessoas.*"

Ludwig von Mises (VON MISES, 2012)

Resumo

Este trabalho versa sobre a Matemática Financeira (MF) e foi elaborado com o objetivo de aprimorar o seu ensino na Educação Básica. A partir de pesquisas bibliográficas e de décadas de experiência com a licenciatura do tema, organizamos uma sequência didática de conteúdos da MF, com foco no Ensino Médio, visando contribuir para a construção da cidadania. Buscamos variadas abordagens, conectadas à realidade, a outros conteúdos matemáticos e de diferentes áreas do conhecimento. Iniciamos contextualizando a MF sob vários aspectos e introduzindo conceitos básicos, para, em seguida, apresentarmos seus desdobramentos. O alicerce para esta construção de conhecimentos reside nos conceitos de progressões e funções. Toda exposição é acompanhada de figuras e de exemplos. Primeiramente, analisamos os assuntos de modo aritmético e algébrico. Posteriormente, exemplos são retomados no contexto tecnológico da HP12c e do Excel. Finalmente, sugerimos algumas atividades a serem desenvolvidas em sala de aula e fazemos nossas últimas considerações.

Palavras-chaves: Matemática Financeira (MF), Cidadania Financeira, Ensino Médio, empréstimos, investimentos, juros, fator de variação, capitalização, juros compostos (JC), juros simples (JS), progressão geométrica (PG), função exponencial, progressão aritmética (PA), função polinomial do 1º grau, capitalização mista, gráficos, sequências de pagamentos, sistemas de amortização, HP12c, Excel.

Abstract

This work deals with Financial Mathematics (MF) and was prepared with the aim of improving its teaching in Basic Education. Based on bibliographical research and decades of experience with the subject's degree, we organized a didactic sequence of MF contents, focusing on High School, aiming to contribute to the construction of citizenship. We look for different approaches, connected to reality, to other mathematical content and from different areas of knowledge. We start by contextualizing FM under several aspects and introducing basic concepts, and then we present its consequences. The foundation for this construction of knowledge lies in the concepts of progressions and functions. Every exhibition is accompanied by figures and examples. First, we analyze the subjects arithmetically and algebraically. Later, examples are taken up in the technological context of HP12c and Excel. Finally, we suggest some activities to be developed in the classroom and make our final considerations.

Keywords: Financial Mathematics (MF), Financial Citizenship, High School, loans, investments, interest, variation factor, capitalization, compound interest (JC), simple interest (JS), geometric progression (PG), exponential function, arithmetic progression (PA), 1st degree polynomial function, mixed capitalization, graphs, payment sequences, amortization systems, HP12c, Excel.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Desde compras que realizamos diariamente até financiamentos e investimentos financeiros, estamos cercados de situações que relacionam o dinheiro e o tempo. A Matemática Financeira (MF) é o ramo da Matemática dedicado ao estudo desta relação. Portanto, é um dos mais presentes no nosso dia a dia e mais úteis para a nossa vida.

Entretanto, durante muito tempo, a MF foi deixada de lado no ensino regular brasileiro, sendo pouco abordada em sala de aula ou trabalhada de modo ineficiente e desconectado da realidade. Assim, ao crescer e se deparar com o mercado, o aluno acaba fazendo escolhas erradas, que resultam em prejuízos, dívidas e diversos outros problemas financeiros. Consequentemente, muitos também desenvolvem transtornos emocionais.

Portanto, muito mais do que um aprendizado escolar exigido por currículos, por exames ou concursos, a MF é fundamental para se conquistar qualidade de vida.

Na caminhada evolutiva do ensino da MF no Brasil, houve muitos tropeços - alguns já foram superados, mas outros persistem atrapalhando o "andar da carruagem". Para tentar corrigi-los, foram criados conceitos e métodos, leis e normas, bem como parâmetros e bases curriculares.

Diferentes organismos nacionais e internacionais têm trabalhado em conjunto para tentar colocar em prática estas novas teorias e regras. Mas ainda estamos engatinhando neste processo. Se as sementes que estão sendo plantadas forem devidamente regadas, nutridas e podadas, então, num futuro próximo, esperamos começar a colher os frutos deste cultivo.

Este trabalho foi elaborado com a finalidade de contribuir para tal semeadura. Mas antes de detalharmos os nossos objetivos, iremos delimitar o enfoque da pesquisa e apresentar a metodologia adotada e o referencial teórico basilar. Em seguida, contextualizaremos a pesquisa sob diferentes perspectivas.

Diretamente ao ponto, abordaremos todos os principais conteúdos da MF que normalmente são trabalhados no Ensino Médio, mas proporemos uma sequência didática diferenciada, com foco no *regime de juros compostos*, sempre buscando contextos cotidianos para introduzir e aprofundar conhecimentos. Trabalharemos também temas de grande importância que ainda são pouco explorados no Ensino Médio, como *capitalização mista*, *sistemas de amortização* e *análise de investimentos*, e veremos como calculadoras e planilhas eletrônicas (em particular a HP12c e o Excel) são imprescindíveis na MF.

A metodologia de pesquisa deste trabalho é baseada em revisões bibliográficas. Entre as obras utilizadas, priorizamos livros específicos de MF, com destaque para Morgado (2005, 2015), Puccini (2017), Mathias (2009), Assaf Neto (2012) e Castelo Branco (2018). Consultamos também vários livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dos quais destacamos Dante (2020), Bonjorno (2020) e Andrade (2020).

Analisamos ainda vídeos do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM, 2015), da Disciplina "Matemática Discreta" do PROFMAT (CARVALHO, [201-]), da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP (CARVALHO, [20--]) e outros.

As principais fontes utilizadas na pesquisa sobre recursos tecnológicos são o guia do usuário da HP12c (HP, 2004) e tutoriais do Excel (MICROSOFT, [2021?a], [2021?b]).

Além disto, alicerçamos nossas propostas em documentos oficiais do MEC - Ministério da Cultura, como a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018); do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, como seus resultados de 2018, no "Volume IV: Os alunos são espertos em relação ao dinheiro?" (OCDE, 2020); da ENEF - Estratégia Nacional de Educação Financeira, na forma do seu Plano Diretor (BRASIL, c2017) e de livros sobre educação financeira nas escolas (BRASIL, 2013); do BCB - Banco Central do Brasil, como o seu glossário (BCB, 2013) e seu material sobre cidadania financeira (BCB, 2018); entre outros.

1.1 Contextualização

Nesta seção, veremos alguns dos contextos mais relevantes que levaram à escolha da MF como tema central desta dissertação, bem como a sua delimitação para o Ensino Médio, com foco na abordagem da capitalização composta e suas ramificações. Os principais motivos, conforme já dissemos, são a sua necessidade cotidiana evidente e o seu ensino escolar pouco eficaz. Isto será constatado a seguir por meio de críticas ao ensino da MF nas escolas brasileiras e aos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, de resultados em exames nacionais e internacionais, de estatísticas sobre inadimplência e investimentos no Brasil e de algumas análises históricas sobre o desenvolvimento da MF no tempo.

No vídeo Papmem (2015), foi reexibida uma aula de MF ministrada pelo professor Augusto César Morgado (1944 - 2006) em 2002. Antes disto, no referido vídeo, o professor Paulo Cezar P. de Carvalho anuncia Morgado como "um dos pioneiros na defesa da importância desse tópico (MF) para o Ensino Médio, principalmente como tópico que ajuda realmente a construir a cidadania". No início da aula, Morgado diz que "Matemática Financeira é um assunto que, inexplicavelmente, não costuma ser ensinado no Ensino Médio" e que, por isto, "a gente chega no Brasil à essa situação absurda de um aluno (...), ao final do Ensino Médio, (...) ser incapaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista e uma compra à prazo". Em seguida, Morgado complementa que "MF pode e deve ser ensinada no Ensino Médio, e a hora adequada é exatamente ligada às progressões geométricas".

O parágrafo acima, mais que uma homenagem ao mestre Morgado, é uma explicação inicial de como iremos organizar e fundamentar nossas abordagens aos temas da MF.

1.1.1 Um pouco sobre o PISA, o SAEB e o ENEM

A incapacidade juvenil em lidar com o dinheiro, relatada pelo professor Morgado em 2002 (PAPMEM, 2015), perdura até hoje, tendo em vista os baixos índices de alfabetização financeira nacional verificados frequentemente por exames e pesquisas.

O PISA, conforme dissemos antes, é um programa internacional de avaliação estudantil. Coordenado pela OCDE desde 2000, já envolveu mais de 90 países ou economias e cerca de 3 milhões de estudantes em todo o mundo, com o objetivo de medir sua capacidade aplicar conhecimentos e habilidades de leitura, matemática e ciências para enfrentar os desafios da vida real.

Ressaltamos a seguinte definição da OCDE (2020):

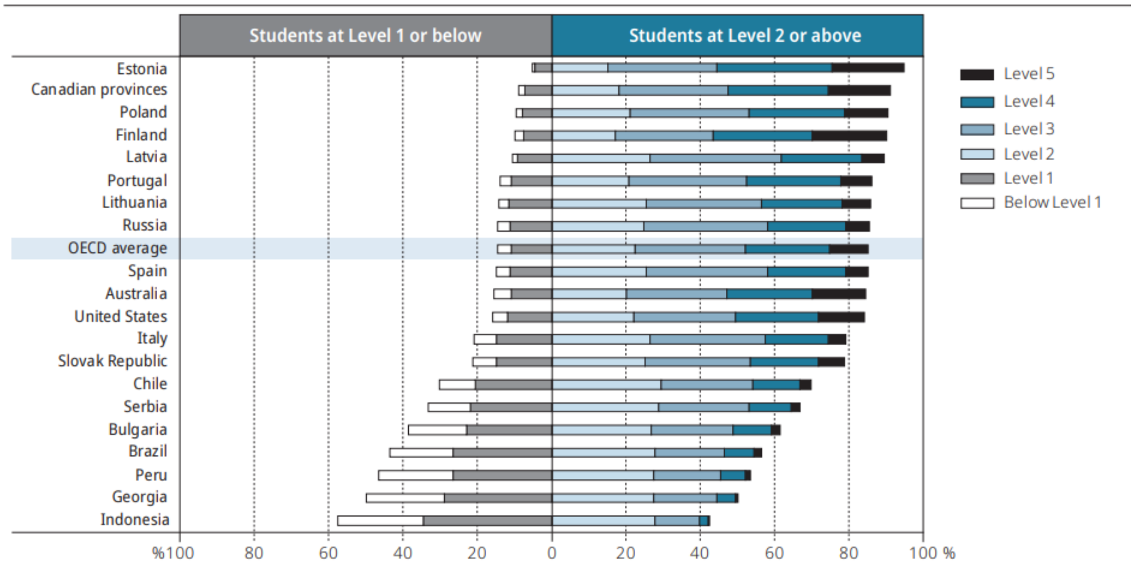
> Letramento financeiro é o conhecimento e a compreensão de conceitos e riscos financeiros, bem como as habilidades e atitudes para aplicar esse conhecimento e essa compreensão, a fim de tomar decisões eficazes em uma variedade de contextos financeiros, melhorar o bem-estar financeiro dos indivíduos e da sociedade, e participar ativamente na vida econômica.

O PISA passou a incluir este domínio em 2012. Mas o Brasil começou a participar da avaliação de letramento financeiro no PISA de 2015, quando foi o último colocado dos 15 participantes (OCDE, 2017). No PISA de 2018, fomos o 4º pior dos 20 países e economias avaliados neste domínio (OCDE, 2020).

Comparando estes resultados, nota-se que o Brasil melhorou um pouco de 2015 para 2018, mas ainda está muito longe dos melhores.

O gráfico da figura 1.1 indica que a maioria dos alunos brasileiros estão no nível 2 ou abaixo dele. Isto significa que eles são capazes de "tomar decisões financeiras em contextos que são imediatamente relevantes", como "escolher entre comprar tomates por quilo ou por caixa", mas não em situações bancárias envolvendo juros (OCDE, 2020).

Figura 1.1: Porcentagem de alunos em cada nível de proficiência em letramento financeiro no PISA de 2018 (OCDE, 2020).



A OCDE estuda ainda o letramento financeiro de adultos e, curiosamente, o Brasil também ficou com a 4ª pior colocação nas avaliações e pesquisas realizadas em 2016, que levam em consideração tanto o conhecimento financeiro quanto atitudes e comportamentos diante do mundo das finanças (OCDE, 2016).

Entre os conhecimentos financeiros analisados pela OCDE com adultos, em 2016, o menor percentual de acertos do Brasil foi registrado no item denominado "combinação de juros simples e compostos" (OCDE, 2016), isto é, em problemas de *capitalização mista*, que podem ser resolvidos por interpolação linear, como no exemplo histórico que será citado na subseção 1.1.3 e retomado na atividade **A.2** do Capítulo 5. Este resultado da OCDE é uma forte razão para dedicarmos parte dos nossos esforços ao referido item.

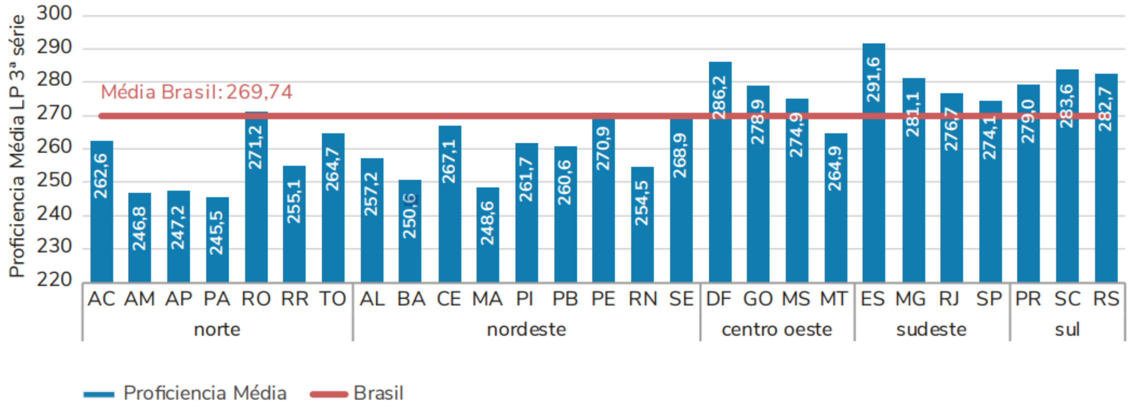
Outro resultado da pesquisa que consideramos importante é que, no Brasil, "a pontuação média das pessoas que se consideravam ter níveis altos ou muito altos de conhecimento financeiro não é maior do que aquelas que pensavam ser iguais à maioria das pessoas, sugerindo um nível preocupante de excesso de confiança nesse grupo" (OCDE, 2016). Na prática, isto pode acarretar prejuízos, endividamentos e consequências muito piores, pois indivíduos que se superestimam tendem a correr riscos desnecessários e se envolver em negócios ruins ou fraudulentos. Eles consideram que não precisam estudar mais ou pedir ajuda.

Isto está diretamente relacionado com a ênfase que se deu ao ensino de juros simples nas escolas brasileiras ao longo dos anos, conforme explicaremos na subseção 1.1.4.

No Brasil, também existem avaliações educacionais, entre as quais, destacamos o SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica. Este sistema utiliza uma escala de proficiência de 1 a 10 para o nível médio de ensino. A partir dos resultados do SAEB, disponibilizados pelo MEC (INEP, [2021?]), obtemos a média geral de proficiência em Matemática na 3ª série do Ensino Médio igual a 269,74 (nível 2), em 2017, e 281,17 (nível 3), em 2019. Apesar da pequena melhora, permanecemos abaixo do nível 4, o que, de acordo as matrizes e escalas do SAEB, significa que o estudante não é capaz de resolver problemas envolvendo aplicações de funções afins e exponenciais, nem de progressões aritméticas e geométricas. Logo, ele não desenvolveu habilidades básicas para compreender a MF. Isto explica, pelo menos em parte, os resultados do Brasil no PISA.

O gráfico a seguir mostra dados do SAEB de 2017, onde o Piauí, em particular, não atingiu a média nacional de proficiência em matemática no 3º ano do Ensino Médio. Com 261,7 pontos, os estudantes piauienses ficaram no nível 2, isto é, eles têm, no máximo, a capacidade de determinar: "o valor de uma função afim, dada sua lei de formação; um resultado utilizando o conceito de progressão aritmética" (INEP, 2019).

Figura 1.2: Proficiência média em Matemática na 3ª série do Ensino Médio no SAEB de 2017 (INEP, 2019).



Outro importante teste que ocorre no Brasil é o ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio. De acordo com as sinopses estatísticas do ENEM (INEP, [2021?]), no ano de 2020, a média nacional da prova de Matemática e suas Tecnologias foi 520,73. A maior nota registrada foi 975.

Nos últimos dez anos de aplicação do ENEM (de 2011 a 2020), a média geral na referida prova foi 504,96. Ela tem ficado sempre em torno da metade da pontuação máxima deste exame (INEP, [2021?]).

Não encontramos pesquisas aferindo o percentual de acertos em questões do ENEM que tratam especificamente da MF. Provavelmente porque ela é muito pouco exigida neste exame. Porém, pelos resultados anteriores, podemos deduzir que não haja muitos candidatos acertando tais questões.

Figura 1.3: Assuntos mais cobrados no ENEM, segundo "Raio X do Enem de 2009 a 2020" da SAS - Plataforma de Educação (SAS, 2021).

Matemática e suas Tecnologias		
Matemática		
Assuntos	Aplicações: 1ª, 2ª e digital	%
Geometria	253	22,5%
Escala, razão e proporção	160	14,2%
Aritmética	133	11,8%
Gráficos e tabelas	102	9,1%
Funções	98	8,7%
Porcentagem	85	7,6%
Estatística	83	7,4%
Probabilidade	61	5,4%
Equações elementares	40	3,6%
Análise combinatória	34	3,0%
Sequências	30	2,7%
Números inteiros e reais	20	1,8%
Trigonometria	16	1,4%
Notação científica	6	0,5%
Matriz	4	0,4%
1125 itens		

De acordo com a tabela acima, a MF sequer consta explicitamente entre os assuntos cobrados no ENEM. Ressaltamos que a MF pode ser facilmente contextualizada em assuntos como "Funções", "Porcentagem" e "Sequências", mas, se adicionarmos seus percentuais de ocorrência chegamos a 19%, enquanto que a "Geometria" ocorreu em 22,5% dos 1125 itens pesquisados. Neste ensejo, cabe a seguinte indagação: é mais importante para o indivíduo comum saber calcular áreas e volumes ou saber decidir entre uma compra à vista ou a prazo?

Ademais, analisando as provas do ENEM (INEP, [2021?]), notamos que, nas três aplicações de 2020 (regular, digital e para pessoas privadas de liberdade - PPL), há algumas poucas questões tratando de temas relacionados com a MF, porém não se menciona uma única vez a palavra "juros", que é o principal conceito da MF. De 2011 a 2020, este termo ocorreu em apenas 4 questões entre 450 questões das provas de Matemática e suas Tecnologias - aplicação regular. Estas questões serão trabalhadas na atividade **A.7** do Capítulo 5.

Concluímos assim, que existe pouca preocupação do ENEM com a MF, o que pode ser um reflexo do que acontece na sociedade brasileira.

Os resultados do PISA, do SAEB e do ENEM mostram que, em geral, a MF não tem sido trabalhada de modo eficiente nas escolas brasileiras. Esta foi uma das mais significativas motivações para a realização do presente trabalho.

1.1.2 Um pouco sobre inadimplência, investimentos e fraudes

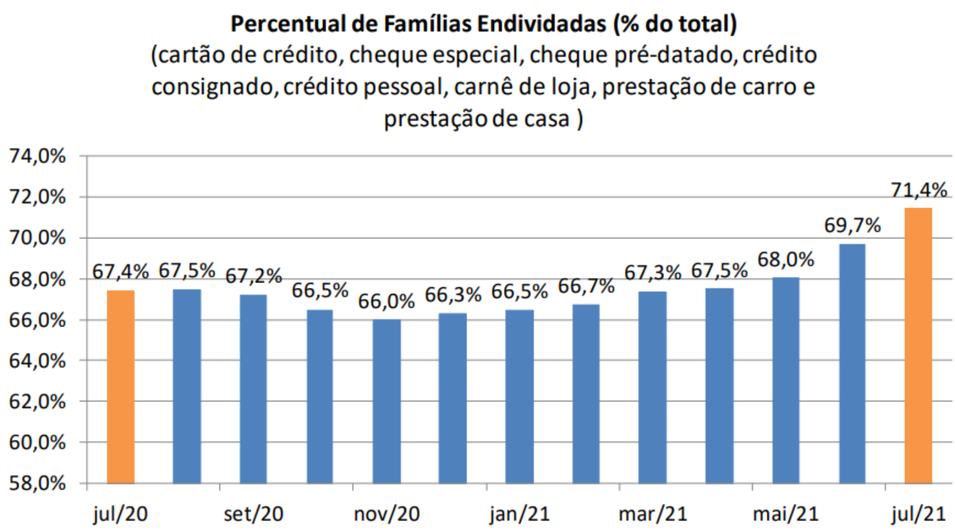
Uma consequência lógica da falta de conhecimentos sobre a MF é a dificuldade em lidar com o dinheiro. Nesta subseção, exemplificaremos tal inabilidade por meio de dados relativos ao endividamento do brasileiro, seu medo de investir e sua inclinação para se tornar vítima de golpes financeiros. Aproveitaremos o contexto para introduzir alguns conhecimentos básicos a respeito dos investimentos financeiros.

O SERASA Experian - "banco de dados de maus pagadores no Brasil" (BCB, 2013) - elaborou o mapa da inadimplência no Brasil, mostrando que, em maio de 2021, havia mais de 60 milhões de brasileiros com contas em atraso (SERASA, 2021). Destes inadimplentes, cerca de 70% estavam entre 25 e 60 anos de idade e suas principais dívidas eram com bancos e serviços de utilidade pública.

Figura 1.4: Mapa da Inadimplência no Brasil em 2021 (SERASA, 2021).

Conforme a PEIC - Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor - deste ano, o Brasil tinha 71,4% de famílias endividadas, em julho, e 82,7% do total das dívidas computadas eram com cartão de crédito (CNC, 2021). Desde o final de 2020, este percentual tem apresentado crescimento.

Figura 1.5: Endividamento no Brasil num intervalo recente de 12 meses (CNC, 2021).



Segundo estudo do BCB de 2019, baseado em indicadores quantitativos de crédito, “4,6 milhões de tomadores encontram-se em situação de endividamento de risco no país”, isto é, 5,4% da população com exposição a crédito têm “volume de dívida acima de sua capacidade de pagamento” que “prejudicam o gerenciamento de seus recursos financeiros e, em última instância, sua qualidade de vida” (BCB, 2021b).

As contas atrasadas afetam tanto a vida financeira quanto a saúde física e mental dos endividados. A Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas - CNDL - e o Serviço de Proteção ao Crédito do Brasil - SPC Brasil - realizaram uma pesquisa em 2019, na qual 82,2% dos brasileiros endividados sofrem impacto emocional negativo por causa das dívidas. Entre os problemas mais citados estão ansiedade, estresse, irritação, tristeza, desânimo, angústia, vergonha, desatenção e queda na produtividade (CNDL, 2019). Logo, a qualidade de vida como um todo depende da estabilidade financeira.

Vejamos agora alguns dados sobre os brasileiros não endividados, que conseguem economizar dinheiro para investir. Mas antes disto, precisamos definir que *investimento financeiro* é a aplicação de dinheiro em algo com a finalidade de obter um ganho monetário e é sustentado por três pilares: *rentabilidade* (ganho em relação ao valor investido), *segurança* (medida inversa do risco de perder ou ganhar menos que o esperado) e *liquidez* (facilidade de converter um ativo em dinheiro sem perda de valor) (BCB, 2013).

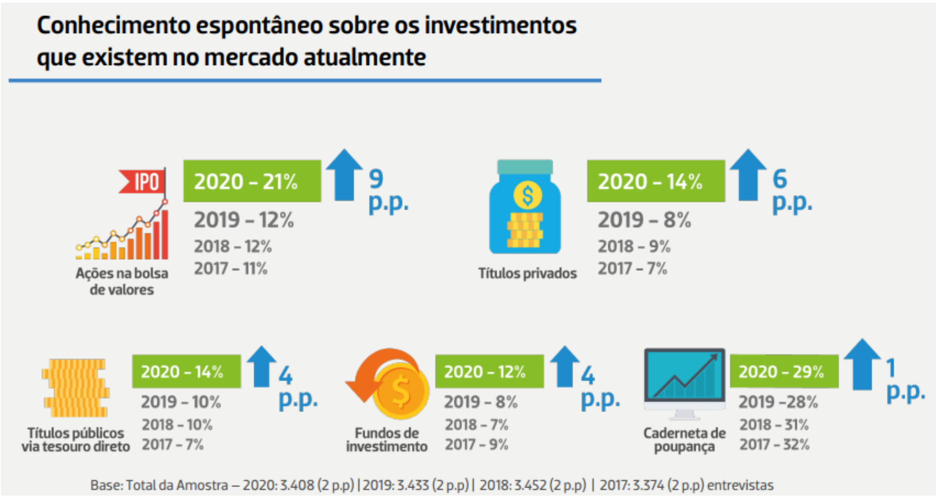
Outro importante conceito que será mencionado a seguir é o IPCA - Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo. Ele é produzido pelo IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - e é considerado, pelo Governo Federal, o índice oficial de *inflação*, isto é, do “aumento dos preços de produtos e serviços”. Por exemplo, o último IPCA que pesquisamos foi 0,87% em agosto de 2021 e o acumulado dos últimos 12 meses foi 9,68% (IBGE, 2021). Assim, qualquer investimento com rentabilidade inferior ao IPCA não gera um ganho efetivo; ele apenas apenas reduz a perda causada pela inflação.

De acordo com levantamento feito pela CNDL e pelo SPC Brasil, divulgado em março de 2020, “dos 34% (dos brasileiros) que costumam fazer reserva financeira, 62% apostam na caderneta de poupança e 27% ainda preferem guardar as economias em casa, motivados, principalmente, pela possibilidade de utilizar o dinheiro a qualquer momento” (SPC BRASIL, 2020).

O que os poupadores brasileiros talvez não saibam é que existem outras opções, como os Títulos Federais, que rendem mais que a poupança, com menos risco e maior liquidez. Também não devem saber que o rendimento da poupança muitas vezes chega a perder para a inflação. Por exemplo, na última pesquisa citada, a economista-chefe do SPC Brasil menciona que, “em 2019, a poupança rendeu próximo a 4%, levemente abaixo do IPCA, o que significa que ela serviu somente para garantir parte do poder de compra do dinheiro investido, sem ganhos reais”. Esta diferença foi ainda maior em agosto de 2021, quando a Poupança rendeu, no máximo, 0,5% (BCB, 2021c), contra o IPCA de 0,87% mencionado anteriormente.

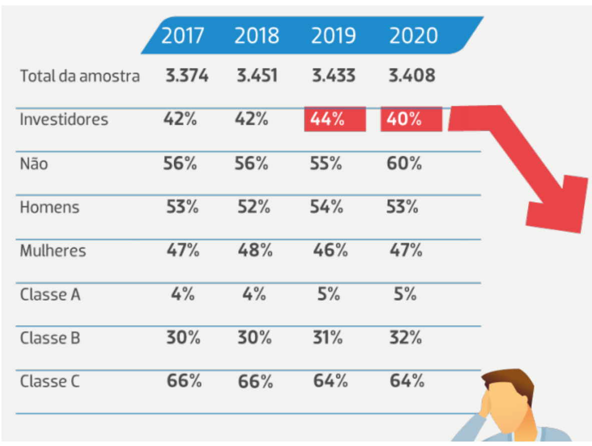
A Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais - ANBIMA - realizou pesquisas intituladas “Raio X do Investidor Brasileiro” em 2017, 2018, 2019 e 2020, nas quais foram entrevistados cerca de 3400 brasileiros por ano (ANBIMA, 2021). Nos resultados espontâneos, os brasileiros disseram conhecer poucos produtos financeiros, dos quais o mais citado foi a poupança. Porém, o número é ainda menor de quem investe no que conhece ou acha que conhece. Afinal, a maioria que disse conhecer a poupança não soube dizer o quanto ela rende.

Figura 1.6: Relatório do “Raio X do Investidor Brasileiro” - 2020: Pesquisa sobre investimentos que o brasileiro diz conhecer (ANBIMA, 2021).



Segundo a ANBIMA (2021), em média, 1/3 dos brasileiros conseguiram economizar dinheiro neste intervalo de tempo (de 2017 a 2020), mas somente 42% deles investiram em produto financeiro, com destaque para a poupança (cerca de 30% das aplicações).

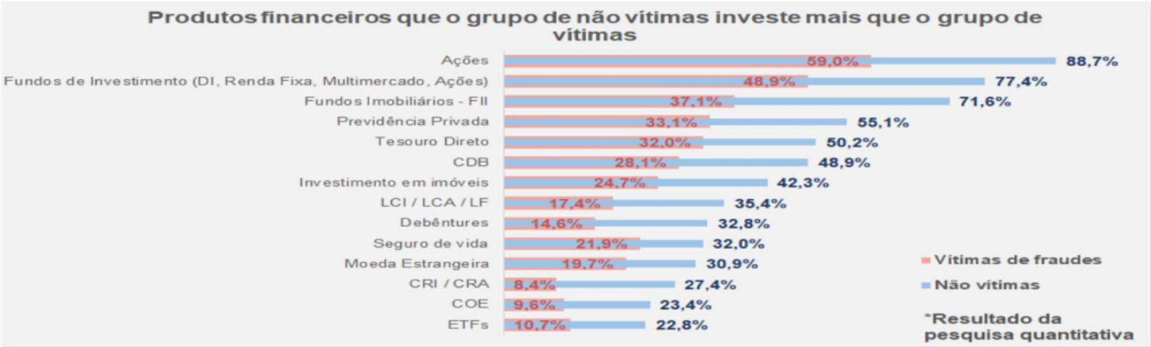
Figura 1.7: Relatório do “Raio X do Investidor Brasileiro” - 2020: Pesquisa sobre número de investidores brasileiros (ANBIMA, 2021).

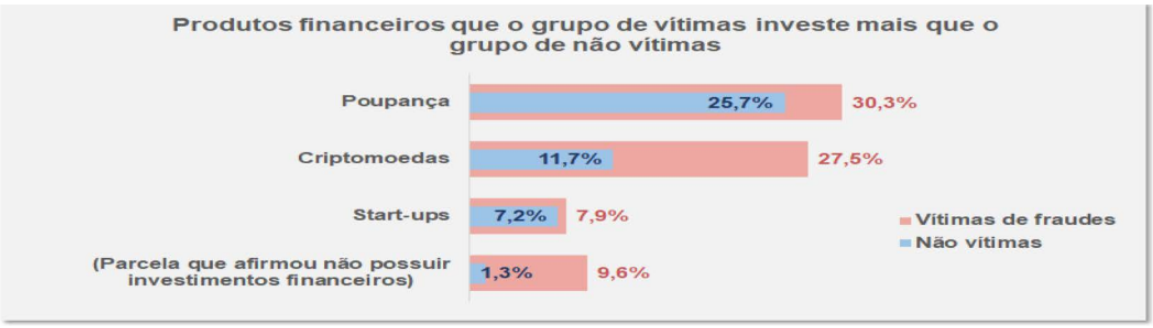


	2017	2018	2019	2020
Total da amostra	3.374	3.451	3.433	3.408
Investidores	42%	42%	44%	40%
Não	56%	56%	55%	60%
Homens	53%	52%	54%	53%
Mulheres	47%	48%	46%	47%
Classe A	4%	4%	5%	5%
Classe B	30%	30%	31%	32%
Classe C	66%	66%	64%	64%

A Comissão de Valores Mobiliários - CVM - realizou pesquisa recente sobre golpes financeiros. Os principais resultados da CVM (2020) sugerem que as não vítimas de fraudes financeiras possuem um portifólio mais refinado e diversificado que as vítimas de fraude. Enquanto "aquele público investe mais que este em ações, fundos de investimento, FII, previdência privada, CDB, LCI/LCA e na maioria das demais opções apresentadas", "as vítimas investiam mais, proporcionalmente, em poupança, criptomoedas e start-ups; também afirmam, em maior número, não possuírem investimentos financeiros".

Figura 1.8: Gráficos de pesquisa de 2020 sobre fraudes financeiras (CVM, 2020).





A referida pesquisa propõe o conhecimento como o melhor caminho para combater fraudes financeiras. Nas palavras dos pesquisadores, "para o enfrentamento desta questão é necessário tornar acessível e amplamente divulgada a informação de quais investimentos e instituições são regulados", bem como

> é essencial o desenvolvimento de materiais educacionais que foquem sobretudo em aspectos concernentes a rentabilidades "modestas" e incentivem a autonomia do investidor na escolha de seus investimentos, para que ele seja capaz de tomar decisões informadas e adequadas ao seu perfil e objetivos (CVM, 2020).

Assim, além do que já foi mencionado sobre investimento financeiro, o investidor precisa conhecer seu perfil preponderante (conservador, moderado ou arrojado), estabelecer seus objetivos (curto, médio ou longo prazo), atentar para princípios básicos como planejamento, criação da reserva de emergência, diversificação, regularidade, perspicácia, resiliência, sabedoria, entre outros.

Diz-se que o investidor tem perfil *conservador*, se prioriza a segurança, isto é, prefere minimizar riscos a ter maiores ganhos. Quem tem perfil *moderado* se procura em equilibrar segurança e rentabilidade. Já o perfil *agressivo* caracteriza aquele que privilegia a rentabilidade, aceitando se arriscar mais (BCB, 2013).

Quanto aos objetivos, deve-se entender que "não dá para ter tudo". Os investimentos mais seguros costumam ter menor rentabilidade. Por outro lado, os mais rentáveis tendem a ser mais arriscados. Além disto, os investimentos de longo prazo são quase sempre mais lucrativos do que aqueles de alta liquidez. Assim, devemos desconfiar de promessas milagrosas de grandes retornos sem risco ou a curto prazo.

Neste contexto, é oportuno falarmos sobre as principais modalidades de renda fixa e renda variável. Primeiramente, expliquemos que os investimentos em *renda fixa* são caracterizados pela remuneração ou sua forma de cálculo definida no momento da aplicação. Por outro lado, na *renda variável*, o investidor não sabe previamente qual será sua rentabilidade, apesar de poder estimá-la a partir de levantamentos estatísticos e de probabilidades (CVM, [201-]).

Entre os títulos de renda fixa, estão as Cadernetas de Poupança, os Certificados e Recibos de Depósito Bancário (CDBs e RDBs), Títulos Públicos Federais (Tesouro Nacional), Letras de Crédito Imobiliário e do Agronegócio (LCIs e LCAs), Letras de Câmbio (LCs), Fundos DI (atrelados à taxa DI dos depósitos interbancários), as Previdências Privadas e as Debêntures (títulos de crédito emitidos por sociedade anônima). Como exemplos de renda variável, podemos citar as ações, os Fundos de Investimento Imobiliário (FIIs), Clubes de Investimento, moedas virtuais e estrangeiras (câmbio), o ouro, Fundos de Índice ou Exchange Traded Funds (ETFs), Fundos Multimercado e derivativos (contratos que derivam a maior parte de seu valor de um ativo subjacente).

Destes títulos, os mais seguros são os que têm garantia do Governo Federal, como os do Tesouro Nacional (Tesouro Prefixado, Tesouro Selic e Tesouro IPCA+), e do Fundo Garantidor de Crédito (FGC), como Cadernetas de Poupança, CDBs, LCIs e LCAs (todos garantidos até 250 mil reais). Nenhum título de renda variável dispõe destas garantias e estão mais sujeitos a riscos e à volatilidade do mercado, porém é possível conseguir relativa segurança neste tipo de investimento (exemplo: um Fundo Multimercado, por não concentrar valores em um único segmento, destaca-se entre as rendas variáveis de menores riscos).

É recomendável ter pelo menos uma aplicação destinada a necessidades urgentes e imprevisíveis. Para isto, ela precisa ter baixíssimo risco e liquidez diária - características típicas das rendas fixas com menores rentabilidades (exemplos: Caderneta de Poupança, Tesouro Selic, CDB com liquidez diária e coberto pelo FGC, fundos DI de renda fixa). Este tipo de investimento é indicado para formar uma *reserva de emergência*, que deve ser constituída por uma quantia de 3 a 12 vezes o valor das receitas mensais, a depender da previsibilidade de saldos periódicos do investidor (TORRALVO, 2016).

Após esta reserva ser formada, será interessante passar a investir também em projetos menos conservadores e de longo prazo, pois, geralmente, são muito mais rentáveis (exemplos: ações, FII, ETF).

A diversificação de investimentos visa, principalmente, diminuir os riscos, pois eventuais perdas em alguns ativos podem ser compensadas por ganhos em outros. Mas esta diversificação deve ser planejada com cuidado, levando-se em conta os critérios mencionados antes (rentabilidade, risco, liquidez), bem como os prospectos das aplicações financeiras, as taxas de juros, tarifas e impostos envolvidos na operação e a solidez da instituição ou do administrador do investimento. Estas informações podem ser encontradas nos sites oficiais do BCB e da CVM: (BCB, 2021a) e (CVM, 2021).

O investidor precisa raciocinar logicamente sobre como deve aplicar seus recursos financeiros, a partir do estabelecimento dos seus objetivos e dos riscos que está disposto a correr e baseado no seu conhecimento de MF. Quanto menor for esta base, mais recomendável é investir pelo intermédio de alguma corretora de valores, devidamente autorizada pelo BCB ou registrada na CVM.

Devemos saber também que existem tributações e outras cobranças sobre as aplicações financeiras, que reduzem a sua rentabilidade líquida. Os dois principais impostos que incidem sobre os títulos de crédito são o Imposto de Renda - IR - e o Imposto sobre Operações e Serviços - IOF. Alguns ativos como a Poupança, as LCIs e as LCAs são isentas destas cobranças, mas isto não significa, necessariamente, terem maior rentabilidade líquida que outros investimentos, como os títulos do Tesouro.

Ressaltamos ainda que, particularmente, num momento de crise, como a perda de renda que muitas pessoas estão enfrentando devido ao Covid-19, entrar em desespero não resolve coisa alguma. O melhor a fazer é analisar a situação financeira pessoal para buscar alternativas. Destacamos entre as principais: poupar dinheiro e investi-lo com inteligência. A MF pode contribuir muito para isto e este trabalho visa suprir, ao menos parcialmente, tais necessidades.

Desta subseção, concluímos que uma parte considerável dos brasileiros tem muita dificuldade de pagar suas contas em dia, de economizar dinheiro e de fazê-lo render. A falta de conhecimentos sobre MF e sobre o mercado são as principais causas, pois a ignorância faz com que o indivíduo seja facilmente convencido a realizar escolhas financeiras ruins. O ignorante tem mais facilidade para se endividar e se tornar vítima de esquemas fraudulentos, o que acaba gerando também problemas emocionais. Outros indivíduos, por reconhecerem a sua ignorância sobre o assunto, preferem fugir de opções financeiras que desconhecem, perdendo assim ótimas oportunidades de investimento.

Estas são mais algumas importantes justificativas para dissertarmos sobre a MF.

1.1.3 Um pouco sobre a história da MF

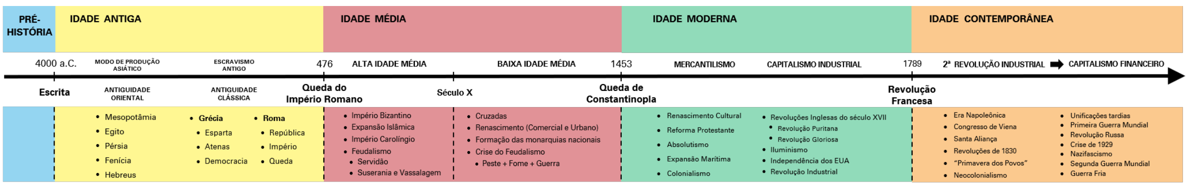
Desde 1999, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN-EM) argumentam que a história da Matemática "tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos" (BRASIL, 1999).

A BNCC complementa que, "para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática" (BRASIL, 2018).

Consideramos, então, pertinente uma breve contextualização histórica da MF, focada em alguns pensamentos, exemplos e resultados que fundamentam este trabalho.

Mostremos primeiro uma linha do tempo com a periodização clássica da história (Figura 1.9), pois situaremos nela importantes eventos relacionados com a MF.

Figura 1.9: Linha do tempo (LINHA..., 2021).



Aproveitando o ensejo, observamos uma interessante relação entre a linha do tempo e alguns importantes conceitos matemáticos. No calendário gregoriano, utilizado oficialmente pela maioria dos países do mundo, incluindo o Brasil, o instante do nascimento do nosso Senhor Jesus Cristo (algum ponto da Antiguidade Clássica, durante o Império Romano) é tido como o marco inicial, que associamos ao número zero. As datas antes de Cristo (a.C.) correspondem a números negativos e as datas depois de Cristo (d.C.), a números positivos. A sigla d.C. costuma ser omitida de datas da Era Cristã, analogamente ao sinal "+", que, de modo explícito ou implícito, acompanha todo número maior que zero. Daí, podem ser feitas várias abordagens inter e intradisciplinares envolvendo a correspondência biunívoca entre a reta e o conjunto dos números reais (Apêndice C). Em particular, na MF, este contexto pode ser útil para introduzir o deslocamento de valores monetários no tempo, conforme veremos no estudo dos diagramas de *fluxo de caixa*.

Retornando ao foco desta subseção, consultamos livros didáticos brasileiros do Ensino Médio que tratam de MF, como Andrade (2020), Balestri (2016), Bonjorno (2020), Cevada (2020), Chavante (2020), Dante (2016), Dante (2020), Iezzi (2004), Iezzi (2016), Iezzi (2018), Leonardo (2017), Longen (2020), Paiva (2015), Souza (2016), Souza (2020). Desta pesquisa, verificamos que raramente é mencionado algo sobre a história da MF.

A citação seguinte é parte de uma destas raridades:

> O dinheiro tem feito parte da história do mundo nos últimos 3 milênios; antes disso, o comércio era realizado por meio de trocas entre produtos e/ou serviços, prática chamada de escambo. Com o aumento do fluxo comercial e também das relações comerciais entre diferentes povos, o escambo tornou-se uma operação cada vez mais inviável, pois ficou difícil decidir quantas unidades de um produto x seriam equivalentes a certo número de unidades de um produto y. O dinheiro nasceu da necessidade de se referir a todos os produtos com uma mesma escala de valores, e provavelmente tenha surgido simultaneamente na Mesopotâmia e na China antes de 1000 a.C. A partir daí, o dinheiro se torna peça-chave na organização e no estabelecimento de todas as sociedades (DANTE, 2016).

Buscamos mais detalhes da história da MF em clássicos como Boyer (2010), Eves (2011), Ifrah (1997), além de outros livros e alguns artigos tratando deste tema.

Os matemáticos babilônicos já sabiam calcular potências e logaritmos, operavam com sequências numéricas e as interpolavam por partes proporcionais a fim de aproximar valores intermediários. "Vê-se um exemplo claro do uso prático da interpolação em tabelas exponenciais num problema que pergunta quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20 por cento ao ano" (BOYER, 2010). Na mesma página, Boyer menciona que o escriba resolveu este problema usando a fórmula de juros compostos e interpolação linear (esta análise ocorrerá na atividade **A.2** do Capítulo 5).

Segundo Eves (2011), ainda na Pré-História, "as pessoas comerciavam entre si e havia necessidade de anotar a parte de cada família na caçada; ambas as atividades dependiam da ideia de contar, um prelúdio do pensamento científico". Logo, as origens da MF e da matemática como um todo relacionam-se diretamente com as do comércio.

De acordo com Ifrah (1997), o comércio cresceu na medida em que aumentava a comunicação entre as diversas sociedades. Os escambos primitivos logo foram padronizados por *unidades* fixas, tais como o boi, na Grécia pré-helênica (daí a origem da palavra *pecúnia*), além de muitos outros objetos, como algodão, cacau, sementes, betume, jade, cerâmicas, ouro. Devido à perecibilidade, a dificuldades de manejo e transporte, entre outros motivos, estas coisas usadas como "moeda de troca" precisaram ser substituídas por uma só. Isto ocorreu de modo mais definitivo a partir do século VII a.C., quando o metal passou a ser fundido em pequenos lingotes, dando origem à *moeda*, no sentido moderno do termo, que viria a constituir um "sistema ideal de troca comercial".

Devido à expansão do comércio e às guerras de conquista do século VI d.C. (Alta Idade Média), alguns comerciantes passaram a acumular moedas estrangeiras, dedicando-se ao câmbio de dinheiro. Assim surgiram os *cambistas* que, com o tempo, começaram a realizar empréstimos a *juros*. No entanto, "a Igreja proibia a seus fiéis que cobrassem juros por seu dinheiro, invocando como autoridade a Sagrada Escritura, onde se lê: 'Amai pois vossos inimigos e fazei o bem, e emprestei, nada esperando disso' (São Lucas, 6:35)".

Obviamente, não se pôde conter o desenvolvimento do comércio, a necessidade natural de se remunerar a concessão do crédito e a criação de bancos privados. O primeiro deles foi "fundado pelo Duque Vitali, em 1157 na cidade de Veneza" e, a partir daí, toda uma rede bancária foi criada (PITON-GONÇALVES, 2005).

Fazia sentido a Igreja condenar os juros nos tempos medievais, pois, "numa economia estática como a ordem feudal (...), o dinheiro, de fato, não funcionava como força produtiva, mas apenas como um atestado de direito a uma certa quantidade genérica de bens que, se vão para o bolso de um, saem do bolso de outro" (CARVALHO, 2014). Porém, com o desenvolvimento acelerado da economia na Europa a partir do século XVIII, a função do dinheiro mudou. A inflação não permitia mais "guardar dinheiro no colchão" e apostar no empobrecimento alheio passou a significar investir na própria falência.

Ressaltamos ainda que, embora haja passagens bíblicas criticando os juros (muitas delas no Antigo Testamento), há outras em defesa deles. Por exemplo, na "Parábola dos Talentos", em Matheus 25: 14 - 30 (BÍBLIA, 2016), Jesus enaltece o homem que faz seus talentos dobrarem ao negociar com eles e condena o que esconde o dinheiro em vez de investi-lo em um banco para recebê-lo de volta com juros. Jesus completa: "Será dado ao que tem e terá em abundância. Mas ao que não tem será tirado mesmo aquilo que julga ter". Consideramos assim, que a cobrança abusiva de juros seja o que a Bíblia abomina de fato (este é o chamado *pecado da usura*), porém admite com naturalidade a remuneração do empréstimo. Não pretendemos com estes argumentos tentar "driblar" a moral cristã, mas sim mostrar como a história se incumbiu de tornar os juros uma prática usual.

Na passagem da Idade Média para a Moderna, a decadência do feudalismo e a intensificação das atividades comerciais e culturais nas cidades deram início ao Renascimento (séculos XIV, XV, XVI). Neste período, começaram a ser redigidos muitos textos de aritmética. O mais antigo deles, de acordo com Boyer (2010), apareceu na cidade italiana de Treviso em 1478 e tratava "das operações fundamentais, das regras de dois e de três, e de aplicações comerciais". Várias outras aritméticas técnicas foram escritas em seguida e resumidas na obra "*Summa*", pelo frade francês Lucca Pacioli (1447 - 1517). Para tal, ele se alicerçou em conhecimentos de grandes matemáticos como o italiano Fibonacci (1170 - 1250) - autor de *Liber Abaci*, que importou do oriente o sistema numérico hindu-arábico, eliminando assim as dificuldades de cálculo geradas pelo sistema numérico romano, especialmente em "problemas sobre transações comerciais" (BOYER, 2010).

Entre as obras mais significativas do período mercantilista, destacamos a *Arithmetica integra* de Michael Stifel (1487 - 1567), devido ao tratamento dado aos números negativos, radicais e potências e *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501 - 1576), que, pelo impacto exercido sobre os algebristas da época, é "tomado como marco do início do período moderno da matemática" (BOYER, 2010).

Também ressaltamos a importância de John Napier (1550 - 1617) por ter inventado os logaritmos a partir das progressões aritméticas e geométricas e as inestimáveis contribuições de René Descartes (1596 - 1650), que, além de ser o "pai da filosofia moderna" e o fundador da geometria analítica (BOYER, 2010), revelou inúmeros resultados importantes, entre os quais a garantia que os polinômios cujos coeficientes só apresentam uma variação de sinal têm apenas uma raiz real positiva (PUCCINI, 2017) - esta é a *regra de sinais de Descartes*, que utilizaremos em cálculos de taxas de juros.

Na época das grandes navegações, a chegada ao "Novo Mundo" acarretou um pujante crescimento do comércio na Europa, levando ao surgimento de poderosas casas bancárias no século XVI e de novas modalidades para a movimentação de dinheiro, como a conta corrente e o cheque. Este pode ser considerado como a primeira forma de *papel-moeda* (GRANDO, 2010)

Neste contexto, começa a ser escrita a história do Brasil que, enquanto colônia portuguesa (1500 - 1820), segundo Simonsen, foi economicamente caracterizado pela "dependência da exportação de produtos agrícolas e extrativistas"; por "produtos pouco elaborados e sujeitos à concorrência de outros países", pela "insuficiência de capitais", pela "exportação e distribuição nas mãos estranhas à produção" e por sua "inferioridade de aparelhamento teórico, econômico e financeiro para a defesa da produção, em relação aos demais países, em cujos mercados efetuam-se as permutas" (SIMONSEN, 2005).

Após este período,

> Pode-se indicar dois momentos históricos fundacionais (...). Esses momentos são, no final do século XIX, a abolição da escravidão, solapando as bases da forma política do Império, e, no início no século XX, a transição histórica do Brasil, de país agrário-exportador para urbano-industrial, tendo como ponto de referência a década de 1930 (CURTY, 2021).

Retornando à história mundial, o enriquecimento das metrópoles europeias, devido ao colonialismo, fomentou o comércio, levou à criação de numerosos bancos e ao consequente aprimoramento das técnicas de cálculo. Neste ensejo, Piton-Gonçalves (2005) afirma que "o surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e ao uso da Matemática Comercial e Financeira, de modo geral".

No século XVII, conforme relata Eves (2011), "num livro intitulado *Do Governo Civil*, o filósofo inglês John Locke (1632 - 1704) propôs a ideia de liberalismo clássico como uma estrutura social, política e econômica". Esta obra inspirou vários outros pensadores da época. Entre eles, o francês Jean Jacques Rousseau (1712 - 1778), no *Contrato Social*, o norte americano Tomas Jefferson (1743 - 1826) na *Declaração de Independência Americana*, e o escocês Adam Smith (1723 - 1790), na obra *A Riqueza das Nações*. Esta última, fundamentada nas "vantagens da propriedade privada para propugnar o capitalismo como sistema econômico", serviu de base para o estudo da Economia ao longo de quase todo o século XIX (EVES, 2011).

Assim foi inaugurada a primeira escola moderna de pensamento econômico: a Clássica. Depois vieram a Marxista, embasada nas teorias de Karl Marx (1818 - 1883) e Friedrich Engels (1820 - 1895), a Neoclássica, introduzida por W. S. Jevons (1835 - 1882) e A. Marshall (1842 - 1924), a Keynesiana de J. M. Keynes (1883 - 1946), a Austríaca de C. Menger (1840 - 1921), a Monetarista de M. Friedman (1912 - 2006) e várias outras. Estas escolas muitas vezes coexistiram, compartilharam semelhanças, ramificaram-se umas nas outras, complementaram-se, sobrepujaram-se e renasceram com algumas modificações (SANDRONI, 1999), mas detalhar estes processos vai além dos nossos objetivos.

Neste ensejo, ressaltamos apenas o seguinte posicionamento oriundo da Escola Austríaca: "bens presentes sempre têm mais valor do que bens futuros da mesma espécie e quantidade" (BÖHM-BAWERK, 1986). Este é o princípio essencial da teoria do juro de Böhm-Bawerk, na qual é fundamentada a definição tradicional da MF (parte da base conceitual deste trabalho, que será detalhada adiante).

Retomando o contexto geral, na medida em que a burguesia passava a desfrutar de boa educação e mais recursos financeiros, também almejava poder político, mas a velha aristocracia, que ocupava os postos governamentais, fazia de tudo para manter os emergentes burgueses afastados do governo. Isto levou a uma série de movimentos revolucionários contra o absolutismo que ocorreram, principalmente, na Inglaterra, na França e nas Américas (MORAES, 2003).

Em meio a este processo, ocorreu a

> Revolução Industrial que deu nascimento à sociedade moderna e começou no século XVIII na Inglaterra. Durante o século XIX espalhou-se pelo continente europeu e pela América. Conforme proliferavam as grandes manufaturas e se esparramavam as cidades, a estrutura da sociedade mudava radicalmente. Entre essas mudanças, o progresso tecnológico rápido desencadeou uma era de investigações científicas sem precedentes (EVES, 2011).

Enquanto os europeus construíam fábricas e elaboravam teorias econômicas, o Brasil ainda era colônia de Portugal. A barateza espoliativa do escravismo neste período teve duas consequências: "diminuiu o interesse na busca de alternativas tecnológicas para redução do custo da mão-de-obra e retardou o crescimento do mercado interno, refreando a capacidade de consumo dos não assalariados" (CAMPOS, 2000).

Somente no século XIX, a história começou a mudar. Mas "a economia brasileira continuou essencialmente agrária e exportadora até o final do século XIX. (...) Depois da crise de 1929, a agroexportação foi desbancada pela indústria (...)" (KOSHIBA, 2003).

Entretanto, segundo Lourenço (2009), o crescimento econômico não transformou o Brasil numa sociedade industrial avançada: passamos por "fases de impulso, estagnação, euforia, choques externos, hiperinflação, transformações institucionais e estabilidade da economia do país". O relativo equilíbrio econômico brasileiro iniciou com o Plano Real de 1994, que inspirado pelo neoliberalismo, após vários outros planos fracassados, finalmente conseguiu conter o longo processo inflacionário iniciado na "Era Vargas" (1930-1945).

Apesar dos inegáveis progressos trazidos pela industrialização, ela também causou mazelas. Por exemplo, a exploração abusiva dos trabalhadores nas fábricas e a excessiva concentração de renda. Segundo Ferguson (2009), aproveitando-se de insatisfações populares, Marx e Engels começaram a propagar a ideia de que "o dinheiro era meramente um instrumento da exploração capitalista, substituindo todas as relações humanas, mesmo aquelas dentro das famílias, pelo desumano nexo da moeda". Em *O Capital*, Marx procurou demonstrar que "o dinheiro era o trabalho transformado em commodity, o excedente gerado pela labuta honesta, apropriado, e depois coisificado para satisfazer a luxúria insaciável da classe capitalista pelo acúmulo de riquezas". Curiosamente, apesar da demonização que os socialistas faziam do capitalismo, "nenhum Estado comunista - nem mesmo a Coreia do Norte - achou prático dispensar o dinheiro" (FERGUSON, 2009).

Contudo, é preciso reconhecer que os socialistas acertaram em muitas críticas ao capitalismo, como a necessidade de corrigir a distribuição desigual da renda e da luta das classes menos favorecidas por seus direitos. Problemáticos foram os meios indicados para se resolver estas questões. Por exemplo, no "*Manifesto Comunista*" de 1848, Marx e Engels proclamam abertamente que os objetivos dos comunistas "só podem ser alcançados pela derrubada violenta de toda a ordem social existente" (MARX; ENGELS, 1888).

Não é nossa intenção aprofundar o debate sobre a aparente dicotomia entre capitalismo e socialismo. Porém, é pertinente aproveitarmos o ensejo para mais algumas observações. Primeiramente, que

> Os países que se tornaram ricos foram aqueles que mais apostaram na liberdade tal como descrita por Bastiat; índices baseados em critérios objetivos mostram correlação direta entre liberdade econômica e riqueza, progresso e justiça social (Como pode ser visto no *Index of Economic Freedom* [Índice de Liberdade Econômica], disponível em www.heritage.org/index/) (BASTIAT, 2016).

Ressaltamos que a liberdade, segundo Bastiat (2016), é "o conjunto de todas as liberdades", "o franco exercício, por todos, de todas as faculdades inofensivas", "a destruição de todos os despotismos" e "a redução da lei à sua única atribuição racional, que é a de regular o direito individual à legítima defesa".

Apesar desses resultados, de acordo com Ferguson (2009),

> Através da história da civilização ocidental, tem havido uma hostilidade recorrente em relação às finanças e aos financistas, enraizada na ideia de que aqueles que ganham a vida emprestando dinheiro são, de alguma maneira, parasitas das verdadeiras atividades econômicas da agricultura e da indústria. (...) Entretanto, a despeito dos nossos preconceitos (...) contra o "lucro imundo", o dinheiro é a raiz da maior parte do progresso. (...) A evolução do crédito e do débito foi tão importante quanto qualquer inovação tecnológica na escalada

> da civilização, da antiga Babilônia até a Hong Kong dos dias de hoje. (...) A finança corporativa foi o alicerce indispensável do Império britânico e do Império holandês, exatamente como o triunfo dos Estados Unidos no século XX foi inseparável dos avanços na indústria dos seguros, no financiamento de hipotecas e no crédito ao consumidor. (...) A república holandesa prevaleceu sobre o Império Habsburgo porque possuir o primeiro mercado moderno de ações era financeiramente preferível a possuir a maior mina de prata do mundo (...).

Assim, fica difícil não admitir que, por trás de cada fenômeno histórico grandioso, existe um segredo financeiro, e é impossível não notar o quanto fazemos parte tudo isto.

Portanto, independente de crenças, ideologias ou filosofias, é fato que vivemos num mundo que se tornou, ao longo da história, predominantemente capitalista e, neste mundo, "as finanças exageram as diferenças entre nós, enriquecendo os mais sortudos e espertos, e penalizando azarados e ignorantes" (FERGUSON, 2009). Por isto, é tão necessário aprender a lidar com o dinheiro, e a ferramenta básica para se atingir tal objetivo é a MF.

1.1.4 Um pouco sobre o ensino da MF no Brasil

Ainda no contexto histórico, de acordo com Lima (2007), a crônica da evolução da Matemática no Brasil pode ser dividida em quatro fases. A primeira, "que vai do descobrimento até a fundação da Academia Real Militar, em fins de 1810", foi de "obscurantismo quase absoluto". A segunda foi "a fase das Escolas Politécnicas, começando em 1810 e indo até 1934". A terceira foi "a fase das Faculdades de Filosofia, na qual se quebrou a tradição secular do autodidatismo". A quarta fase, "que vem até hoje, tem origem em 1951 com a criação do Conselho Nacional de Pesquisas" (CNPq), cuja primeira unidade foi o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada).

Ao longo dos anos, o ensino da Matemática no Brasil sofreu as influências de cada época. A evolução do Ensino Médio, em particular, acolheu alguns excessos:

> inicialmente os incontáveis cálculos e manipulações fastidiosas que predominaram até 40 anos atrás, depois do que veio a exagerada preocupação com o formal e o abstrato, tão própria da chamada Matemática Moderna e, atualmente, o encanto pela tecnologia, o fascínio pelo computador e a obsessão imediatista, o pragmatismo dos dias em que vivemos (LIMA, 2007).

Convém observar que esses erros ocorreram e permanecem ocorrendo devido ao extremismo, porém todos se originaram de necessidades verdadeiras. O que talvez tenha faltado, como de costume, no ser humano, foi moderação. Na busca por este tipo de equilíbrio foi realizado o presente trabalho.

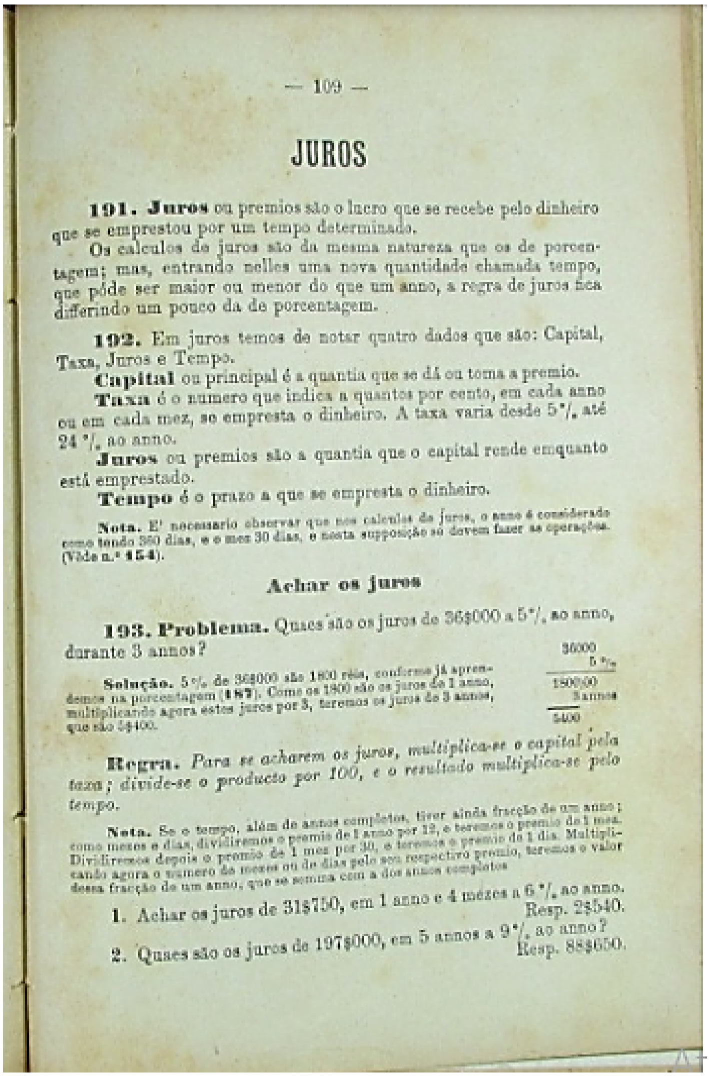
Como o livro didático é o instrumento essencial utilizado pelo professor, então a qualidade deste livro pode ser considerada para aferir a qualidade do ensino.

Valente (1999) aponta que o primeiro livro didático de Matemática escrito no Brasil foi o *Exame de Artilheiros* - uma obra enfatizando aritmética básica, elaborada pelo Brigadeiro português José Fernandes Pinto Alpoim, em 1744, especificamente para "Aulas de Artilharia e Fortificações". Mas o livro foi impresso em Portugal porque ainda éramos colônia de lá. Somente a partir de 1808, com a chegada da família real portuguesa no Brasil, livros começaram a ser impressos no país.

Após uma fase de cópias e traduções de livros europeus, passamos para a fase autoral. Em torno de 1830, surgiram as primeiras obras didáticas nacionais, como as do defensor da implementação do sistema métrico no Brasil: Cândido Baptista de Oliveira (1801-1865) - um dos pioneiros a tratar da MF em suas obras (VALENTE, 1999).

Oliveira (2015) ressalta a importância de outros autores como Antonio Bandeira Trajano (1843 - 1921), que escreveu vários livros de Matemática - alguns reeditados mais de cem vezes. Entre eles destacamos a sua trilogia *Arithmetica*.

Figura 1.10: Juros na *Arithmetica Elementar Illustrada* de Trajano (TRAJANO, 1907).



— 109 —

JUROS

191. Juros ou premios são o lucro que se recebe pelo dinheiro que se emprestou por um tempo determinado.

Os calculos de juros são da mesma natureza que os de porcentagem; mas, entrando nelles uma nova quantidade chamada tempo, que póde ser maior ou menor do que um anno, a regra de juros fica differindo um pouco da de porcentagem.

192. Em juros temos de notar quatro dados que são: Capital, Taxa, Juros e Tempo.

Capital ou principal é a quantia que se dá ou toma a premio.

Taxa é o numero que indica a quantos por cento, em cada anno ou em cada mez, se empresta o dinheiro. A taxa varia desde 5 °/. até 24 °/. ao anno.

Juros ou premios são a quantia que o capital rende emquanto está emprestado.

Tempo é o prazo a que se empresta o dinheiro.

Nota. E' necessario observar que nos calculos de juros, o anno é considerado como tendo 360 dias, e o mez 30 dias, e nesta supposição só devem fazer as operações. (Vide n.° **154**).

Achar os juros

193. Problema. Quaes são os juros de 36$000 a 5 °/. ao anno, durante 3 annos?

Solução. 5 °/. de 36$000 são 1800 réis, conforme já aprendemos na porcentagem (**187**). Como os 1800 são os juros de 1 anno, multiplicando agora estes juros por 3, teremos os juros de 3 annos, que são 5$400.

36000
5 °/.
18000
3 annos
5400

Regra. *Para se acharem os juros, multiplica-se o capital pela taxa; divide-se o producto por 100, e o resultado multiplica-se pelo tempo.*

Nota. Se o tempo, além de annos completos, tiver ainda fracção de um anno; como mezes e dias, dividiremos o premio de 1 anno por 12, e teremos o premio de 1 mez. Dividiremos depois o premio de 1 mez por 30, e teremos o premio de 1 dia. Multiplicando agora o numero de mezes ou de dias pelo seu respectivo premio, teremos o valor dessa fracção de um anno, que se somma com a dos annos completos

1. Achar os juros de 31$750, em 1 anno e 4 mezes a 6 °/. ao anno. Resp. 2$540.

2. Quaes são os juros de 197$000, em 5 annos a 9 °/. ao anno? Resp. 88$650.

Além das diferenças vocabulares e notacionais deste texto, características do ano em que foi escrito, Trajano considera empréstimos com juros sempre iguais a uma porcentagem do valor inicial (o que hoje chamamos de *juros simples*).

Pergunta-se no referido trecho: quais são os juros de 36000 réis a 5% ao ano durante 3 anos? Na solução, é dito que 5% de 36000 réis são 1800 réis, e prossegue-se: "Como os 1800 são os juros de 1 ano, multiplicando agora estes juros por 3, teremos os juros de 3 anos, que são 5400 réis".

Devido a razões sociais, econômicas, culturais e outras daquela época, não podemos afirmar categoricamente que Trajano errou. Porém, repetir hoje o que ele fez, certamente, seria um equívoco. No entanto, não é difícil encontrar em livros didáticos atuais situações nada realistas como empréstimos bancários a juros simples.

A seguir daremos uma explicação matemática baseada em raciocínio lógico elementar para justificar nossas últimas afirmações.

Se você me emprestar 36000 hoje, à 5% ao ano, então o juro daqui 1 ano será $(5\%).36000 = 1800$. Mas este juro só deve permanecer constante no próximo ano se for pago no final do primeiro ano. Caso contrário, a minha dívida passa a ser $36000 + 1800 = 37800$. Logo, não faz sentido você continuar me cobrando 1800 réis de juros no segundo ano, pois é como se, no final do primeiro ano, eu tivesse feito um novo empréstimo de 37800. Assim, é natural que você me cobre juros de $(5\%).37800 = 1890$, donde o valor a ser pago no final do segundo ano será $37800 + 1890 = 39690$. Analogamente, os juros do terceiro ano serão $(5\%).39690 = 1984,5$. Portanto, o total de juros é $1800 + 1890 + 1984,5 = 5674,5$ em vez dos 5400 da solução de Trajano.

O método que apresentamos acima é a essência do que denominamos atualmente de *juros compostos*. Este assunto será detalhado no Capítulo 2.

Segundo Oliveira (2015), as obras de Trajano circularam pelas escolas brasileiras durante quase um século e a sua metodologia, que era inovadora para época, predominou nos livros de matemática deste período.

Apenas na quarta fase da história da Matemática no Brasil, conforme Lima (2007), a MF passou a ser abordada de modo um pouco diferente. A primeira aparição da expressão "matemática financeira" em textos do MEC (Ministério da Educação) ocorreu em 2002, nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio ou "PCN+" (BRASIL, 2002). Retomaremos este contexto legal na próxima subseção.

Em 2001, o número 46 da Revista do Professor de Matemática apresentou um artigo sobre o livro "Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio" (LIMA, 2001), no qual, após a apreciação de 36 livros de Matemática deste nível de ensino, concluiu-se que, em geral, apesar de bem impressos e ilustrados, os livros continham "muitas imprecisões e erros", seus textos não induziam o leitor a pensar, transmitiam sistematicamente a ideia de que as generalizações matemáticas resultam de alguns casos particulares, eram utilizadas terminologias peculiares raramente retomadas na Universidade e não estabeleciam conexões entre os assuntos estudados em diferentes capítulos ou volumes, tais como progressões, funções e juros. Logo, das três componentes básicas do ensino da Matemática (conceituação, manipulação, aplicações), privilegiavam a manipulação e, além disto, a parte conceitual era muito deficiente e as aplicações reais e contextualizadas praticamente inexistiam. Em particular, segundo Lima (2001), nos livros de Ensino Médio analisados, "a Matemática Financeira não é suficientemente desenvolvida".

Em 2002, o professor Morgado ainda se sentia muito incomodado com a preferência nacional pelo ensino dos *juros simples* nas escolas, em vez de se priorizar os *juros compostos*. Isto fica evidente no vídeo Papmem (2015), onde Morgado considera tal situação "lastimável", pois "cria no aluno a ilusão de que ele aprendeu a fazer cálculos financeiros", contribuindo para que o aluno se torne "uma vítima fácil dos espertalhões que praticam a fina arte de afastar os tolos do seu dinheiro". O saudoso mestre complementa:

> Se for ensinar apenas juros simples, é melhor não ensinar; assim, pelo menos você não cria no aluno a falsa impressão de que ele entende daquilo. É melhor não saber do que saber errado. Quem não sabe e tem consciência que não sabe sempre pode procurar um especialista. Agora, quem pensa que sabe, aí não tem jeito (PAPMEM, 2015).

Do início do século XXI para cá, houve algumas mudanças significativas no ensino da MF, decorrentes, principalmente, da BNCC, cuja 1ª versão foi divulgada em 2015, a 2ª em 2016 e a 3ª, dita "versão final", em 2018. A partir da análise das primeiras versões da BNCC e de livros didáticos daquela época, Amorim (2016) afirma que

> O ensino de Matemática Financeira no Ensino Básico obedece, frequentemente, um roteiro padronizado descrito pelos livros didáticos mais utilizados no país. Em geral, inicia-se o tema com uma revisão dos cálculos com porcentagens, abordando acréscimos e descontos percentuais e determinação de taxas. Em seguida, introduz-se os conceitos de Capital, Juros, Taxas de Juros e Montante e, então, o aluno é apresentado a dois regimes distintos de juros: os Juros Simples e os Juros Compostos; em seguida, suas fórmulas para cálculo de montante são apresentadas (às vezes sem justificativa) e exaustivamente aplicadas em exemplos e exercícios quase sempre desconectados da realidade. Alguns livros chegam a tratar rapidamente, e aparentemente como um tema complementar, de alguns problemas de equivalência de capitais e de atualização financeira.

Amorim (2016) também diz que o ensino tradicional não costuma abordar os sistemas de amortização mais usados, problemas de tomada de decisão envolvendo equivalência de capitais nem de determinação de taxas de juros embutidas em financiamentos ditos "sem juros".

O PISA de 2018 pode contribuir neste contexto, pois, de acordo com seus dados, os alunos brasileiros, quando questionados se tiveram, nos últimos 12 meses, "livro-texto específico sobre questões financeiras", responderam que não 58%, que sim 20,9% e os que não sabiam foram 20,2%. A mesma pergunta em relação a "livro didático sobre algum outro assunto, mas que discuta questões financeiras" teve 49,5% de respostas negativas, 28,8% positivas e 21,5% disseram não saber (OCDE, 2020).

Se os alunos entrevistados fossem todos de escolas públicas piauienses, a resposta "não" para a primeira indagação, provavelmente, seria próxima dos 100%, tendo em vista que, durante mais de vinte anos lecionando na rede estadual de ensino do Piauí, até 2021 não havia sido disponibilizado livro de matemática tratando especificamente da MF. Para exemplificar, citamos os livros Balestri (2016), Dante (2016), Iezzi (2016), Souza (2016), que abordam a MF em meio a outros assuntos. Entretanto, as coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD - de 2021 apresentaram volumes priorizando MF. Entre eles: Andrade (2020), Bonjorno (2020), Cevada (2020), Chavante (2020), Dante (2020), Longen (2020), Souza (2020).

Quanto aos 11 livros didáticos citados acima (cada um aprovado pelo MEC em seu respectivo ano de publicação) e outros como Iezzi (2004), Iezzi (2018), Leonardo (2017) e Paiva (2015), todos contém pelo menos o básico da MF, embora a maioria persista na sequência tradicional mencionada por Amorim e em aplicações desconexas da realidade como exemplos irreais envolvendo juros simples. Em relação ao trabalho com recursos tecnológicos, os livros de 2020 apresentam aplicações de planilhas eletrônicas na resolução de problemas de MF, mas nenhum explora o uso de uma calculadora financeira como a HP12c. Além disto, ou estes livros tratam de modo muito superficial ou sequer mencionam conteúdos como a capitalização mista, os sistemas de amortizações e a análise de investimentos.

Em outros capítulos desta dissertação, detalharemos o estudo dos três últimos assuntos mencionados, mas é pertinente ressaltarmos aqui alguns de seus aspectos principais, os quais motivaram a sua abordagem.

A capitalização mista, que opera com juros compostos em prazos inteiros e com juros simples na parte não inteira do prazo, é um método muito comum no mercado. Ele ocorre, de modo geral, em todo problema financeiro que opera com intervalos de tempo fracionários e é a principal aplicação prática dos juros simples. Por exemplo, podemos encontrá-lo nos juros moratórios, em descontos de títulos, na análise de investimentos pelo "Payback descontado" e no modo padrão de funcionamento da HP12c. Entretanto, não encontramos sequer um livro de nível médio tratando deste assunto.

Os sistemas de amortizações estão presentes na maioria dos parcelamentos, principalmente em financiamentos de longa duração. Este conteúdo é mais facilmente encontrado em livros didáticos do Ensino Médio mais recentes. Porém, nos supracitados, estes sistemas são, geralmente, abordados superficialmente, sem evidenciar deslocamentos de valores no tempo por meio de diagramas de fluxo de caixa e sem demonstrações de fórmulas.

Comparar investimentos para escolher o mais viável é tão importante quanto comparar sistemas de amortizações para não se endividar em um financiamento, entretanto, não notamos qualquer análise de investimentos nos livros de nível médio mencionados.

1.1.5 Um pouco sobre leis e normas

Mencionamos anteriormente algo sobre a BNCC, mas é importante ressaltarmos alguns pontos que levaram à sua elaboração e suas propostas quanto ao ensino da MF.

A Constituição Federal (BRASIL, 1988) determinou como competência privativa da União legislar sobre as "diretrizes e bases da educação nacional" (Art.22, XXIV) e definiu a educação como "direito de todos e dever do Estado e da família" a ser "promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho" (Art.205).

A partir daí, em 1996, foi criada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (BRASIL, 1996), onde se estabeleceu que "os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum" (Art.26). Em particular, esta lei define direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio em quatro áreas do conhecimento, entre as quais "matemática e suas tecnologias" (Art. 35-A - incluído em 2017).

A nossa "Carta Magna" abriu o caminho para a reforma do ensino nacional e a LDB foi o marco inicial deste processo, mas a BNCC, prevista nesta Lei, só foi definida mais de vinte anos depois. Antes dela, os programas de ensino pautaram-se pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN. Vejamos como a MF é tratada nestes marcos legais.

No início do século XXI, a MF começou a ser mencionada nos "PCN+". Porém, apenas como aplicação do estudo de funções, sem fazer parte do quadro de conteúdos. Em todas 141 páginas do documento, o tema é citado uma única vez da seguinte forma: "As funções exponencial e logarítmica (...) são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como *matemática financeira* (...)" (BRASIL, 2002).

Em 2010, houve uma mobilização nacional para promover ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal no Brasil. Trata-se da ENEF, que foi renovada pelo Decreto Federal nº 10.393, de 9 de junho de 2020, visando contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes. Dos 8 órgãos e entidades governamentais que integram a nova ENEF, destacamos o BCB e a CVM (BRASIL, c2017).

A partir daí, o Comitê Nacional de Educação Financeira - CONEF - publicou a coleção “Educação financeira nas escolas: ensino médio” (BRASIL, 2013): um material que aborda desde a vida financeira familiar até a economia mundial. Ele foi distribuído gratuitamente em escolas brasileiras e, mesmo que não tenha sido amplamente tralhado em sala de aula, significou um avanço importante para o ensino da MF.

Em 2015, houve uma primeira versão da BNCC, na qual se fazia uma única menção à MF. Pior foi a segunda versão de 2016, que não mencionou a MF uma vez sequer. Mas isto foi corrigido em 2018, com a publicação da “versão final” da BNCC. Na parte do Ensino Médio, esta base menciona que, “na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos (...)” (BRASIL, 2018). Então devemos estender para esta área as orientações que a BNCC faz para a Matemática no Ensino Fundamental. Entre elas, destacamos, na unidade temática “Números”,

> o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos (BRASIL, 2018).

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC propõe que sejam desenvolvidas 43 habilidades em Matemática e suas Tecnologias. Destas, identificamos 10 ligadas à MF:

> (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
>
> (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
>
> (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou

> análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
>
> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
>
> (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
>
> (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
>
> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
>
> (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afns de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BRASIL, 2018).

Podemos perceber que houve um avanço significativo da importância dada à MF, em documentos oficiais do MEC.

A BNCC é uma das bases para a edificação deste trabalho. Outro importante alicerce para esta obra é o da "Cidadania Financeira", que, segundo o BCB, "é o exercício de direitos e deveres que permite ao cidadão gerenciar bem seus recursos financeiros", cujo desenvolvimento ocorre "por meio de um contexto de inclusão financeira, de educação financeira, de proteção do consumidor de serviços financeiros e de participação no diálogo sobre o sistema financeiro" (BCB, 2018).

Existem muitos outros aspectos legais referentes ao sistema financeiro nacional e a crimes financeiros que merecem ser estudados. Mas destacaremos aqui apenas o delito da usura, definido legalmente, em 1933, como toda simulação ou prática tendente a ocultar a verdadeira taxa do juro ou a fraudar dispositivos legais (Art.13 do Decreto 22.626). O mesmo decreto proíbe "contar juros dos juros", exceto "a acumulação de juros vencidos aos saldos líquidos em conta corrente de ano a ano" (Art. 4º). Isto tornou ilegal a capitalização de juros em períodos inferiores a um ano, com exceções.

Segundo Puccini, (2017), "essa proibição foi mantida pelo Novo Código Civil (Lei 10.406, de 2002)", porém não significa uma "proibição explícita quanto à utilização do regime de juros compostos", pois ele "não implica, necessariamente, a cobrança de juros sobre juros". Uma explicação para isto foi dada na abordagem do problema de emprestar 36000 à 5% ao ano (vide p.21).

Para não sermos vítimas ou acusados de crimes de usura, devemos estar atentos aos limites legais que caracterizam a cobrança abusiva de juros (Lei 1.521/51).

1.2 Objetivos

A partir do que foi posto até aqui, estabeleceremos os objetivos desta pesquisa.

1.2.1 Objetivo Geral

Apresentar propostas de abordagem da MF no Ensino Médio, com foco no regime de juros compostos, buscando explorar em vários contextos e de diferentes modos as movimentações financeiras no tempo, a fim de contribuir para a formação de cidadãos financeiramente saudáveis e proativos, capazes de minimizar perdas e maximizar ganhos, tomando decisões financeiras inteligentes e podendo, assim, conseguir uma melhor qualidade de vida para si e para outrem.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Apresentar de modo claro, conciso, preciso e contextualizado os principais conceitos e resultados da MF, a partir de recomendações do MEC, de grandes mestres e especialistas nesta área, bem como da experiência pessoal de mais de vinte anos na licenciatura do tema.

- Priorizar o estudo dos juros compostos, evidenciando que este regime de capitalização é a regra geral do mundo das finanças e que os juros simples são uma exceção a esta regra.

- Proporcionar meios para que o aluno aprenda a teoria básica da MF conectada a outros conhecimentos, ao seu cotidiano e à realidade do mercado, possibilitando e intermediando, o quanto antes, a colocação da teoria em prática.

- Propor atividades de MF a serem desenvolvidas em sala de aula, de modo aritmético, algébrico, tecnológico e sistemático, onde a mesma atividade pode ser trabalhada inicialmente em um contexto introdutório e retomada na abordagem de diferentes assuntos da MF.

- Explorar o uso da calculadora financeira HP12c e da planilha eletrônica Excel na resolução de problemas reais de MF.

- Contribuir para o desenvolvimento das dez habilidades apresentadas pela BNCC (BRASIL, 2018), que citamos anteriormente, focando nas seguintes: EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT303 e EM13MAT304.
- Auxiliar na aquisição de habilidades necessárias para resolver problemas envolvendo capitalização mista, sistemas de amortização e análise de investimentos, sem e com o auxílio da HP12c e do Excel.
- Colaborar para a construção da Cidadania Financeira, buscando a formação de indivíduos capazes de lidar com problemas financeiros típicos do seu dia a dia, de identificar fraudes e abusos do mercado e de progredir financeiramente na vida, sem precisar faltar com a ética e a honestidade.
- Servir de base para a elaboração de materiais didáticos sobre MF, que atendam aos objetivos anteriores.

1.3 Estrutura do Trabalho

A fim de atingir os objetivos anteriores, esta dissertação foi organizada em seis capítulos, além das referências bibliográficas e dos apêndices.

No Capítulo 1, a atual introdução, contextualizamos a MF sob aspectos sociais, históricos, didáticos e legais, estabelecendo, neste processo, suas características essenciais e o que buscamos alcançar com este trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos os fundamentos da MF, exaltando seus principais conceitos e resultados, sempre em conexão com outros conteúdos matemáticos, como progressões e funções, e com situações da vida real.

No Capítulo 3, são abordadas as sequências de pagamentos, com foco nas que ocorrem nos sistemas de amortizações mais comuns e em investimentos financeiros.

No Capítulo 4, tratamos dos recursos tecnológicos mais utilizados no mercado financeiro: a calculadora financeira HP12c e o software Microsoft Excel.

No Capítulo 5, propormos oito atividades sobre a MF, acompanhadas de soluções aritméticas, algébricas e tecnológicas.

No Capítulo 6, constam as considerações finais, onde ressaltamos as principais contribuições inovadoras deste trabalho e fazemos nossas últimas observações e desenlaces.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Este capítulo é dedicado aos fundamentos da Matemática Financeira (MF).

2.1 Pressupostos

Como o presente trabalho foca no 3º ano do ensino médio, espera-se que boa parte da matemática básica tenha sido estudada. Assim, partiremos de pressupostos conhecimentos sobre conjuntos, sequências e funções. Apresentamos a seguir as principais notações, conceitos e resultados referentes a estes assuntos que são utilizados aqui. Eles estão um pouco mais detalhados do Apêndice A ao Apêndice I.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ ...\}$ deve ter sido compreendido como modelo abstrato de contagem fundamentado na ideia de sucessividade, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{...;\ -2;\ -1; 0; 1; 2;\ ...\}$ precisa estar definido pela união disjunta $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ deve estar caracterizado pela sua correspondência biunívoca com a reta e pelos seguintes fatos: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$, onde $\mathbb{Q} = \{m/n\,,\ \forall\,(m\,;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos números racionais e $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números irracionais, ambos infinitos (vide Apêndices A, B e C).

Consideramos que se saiba operar aritmética e algebricamente no universo $\mathbb{R}$, inclusive com equações e funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas.

Em particular, dados $A, B \in \mathbb{R}$, uma relação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) será dita *função polinomial do 1º grau* quando $A \neq 0$ e $f(x) = A.x + B$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou *função exponencial* quando $A > 0$, $B > 0$ e $f(x) = B.A^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disto, iremos considerar fato conhecido que o gráfico da função polinomial do 1º grau é uma reta ascendente se $A > 0$ ou descendente se $A < 0$ e que o gráfico da função exponencial é uma curva exponencial ascendente se $A > 1$ ou descendente se $A < 1$ (vide Apêndice G).

Também serão de suma importância as funções reais com domínio discreto representadas por sequências numéricas: $(a_n) = (a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...)$. Entre elas, destacamos a progressão aritmética (PA) e a progressão geométrica (PG), cujos principais resultados apresentamos a seguir (vide Apêndice H).

Na PA (a_n) de razão $r \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos: $a_n = a_1 + r.(n-1)$ (TPA - termo geral da PA) e $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n.(a_1+a_n)}{2}$ (SPA - soma dos n primeiros termos da PA).

Na PG (a_n) de razão $q \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos: $a_n = a_1.q^{(n-1)}$ (TPG - termo geral da PG) e $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$, se $q \neq 1$ (SPG - soma dos n termos iniciais da PG). Caso $|q| < 1$, temos $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q}$ (SPG_∞ - limite da soma dos infinitos termos da PG que tem razão entre -1 e 1).

Uma breve revisão desses pré-requisitos pode ser realizada por meio de exercícios no contexto da MF. Com este objetivo, analisaremos o problema de decidir entre comprar à vista ou a prazo, na 1ª solução da atividade **A.1** do Capítulo 5.

Além dos conhecimentos matemáticos anteriores, suporemos que se tenha acesso a máquinas de calcular, computadores e internet. Para este capítulo e para o próximo, serão suficientes as calculadoras científicas, que vêm de fábrica na maioria dos telefones celulares e estão disponíveis gratuitamente na internet.

Por fim, suporemos todo valor monetário em reais (R$), que iremos considerar, a priori, uma moeda forte, em cenário econômico estável, salvo menção em contrário.

2.2 Definição de MF

Tradicionalmente, costuma-se dizer que a MF é o ramo da Matemática "que trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo" (ASSAF NETO, 2012). Apesar de estar correta do ponto de vista acadêmico e formal, esta definição não explicita importâncias sociais e pedagógicas da MF.

Considerando o sistema econômico vigente na maioria dos países, inclusive no Brasil, a MF deve ser apresentada também como "segmento da matemática que contribui para que os indivíduos possam exercer sua cidadania em um mundo capitalista" (CASTELO BRANCO, 2016). Em seguida, o mesmo autor qualifica a MF como "linguagem de alfabetização" para este mundo.

Neste contexto, é imprescindível esclarecer que o objetivo da aprendizagem da MF é adquirir conhecimentos mínimos para lidar com as questões financeiras do dia a dia, mas também para economizar e gerar dinheiro por meio de organização orçamentária, consumo consciente, investimentos rentáveis e empreendedorismo, buscando assim conquistar estabilidade financeira e melhorar gradativamente a qualidade de vida. Portanto, o ensino da MF deve almejar a "Cidadania Financeira".

Dando continuidade a esse processo conceitual, Puccini (2017) reafirma que a "Matemática Financeira está diretamente ligada ao valor do dinheiro no tempo" e acrescenta que este valor "está interligado à existência da taxa de juros". Além disto, ele fundamenta a MF em dois mandamentos:

> · somente valores monetários da mesma data podem ser comparados e somados algebricamente;
>
> · valores de datas diferentes são grandezas que não podem ser somadas algebricamente ou comparadas entre si, a menos que sejam previamente movimentadas para a mesma data, com a correta aplicação de uma taxa de juros.
>
> (PUCCINI, 2017)

Este ensejo remete ao conceito de valor nominal, que é um valor de face declarado em determinada data. Logo, valores nominais iguais podem não ter o mesmo valor real.

Citamos a seguir uma excelente definição técnica para a MF, de Morgado (2005), que emprega sua terminologia específica a ser detalhada na seção 2.3.

> A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado principal), empresta-o a outrem por certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma $C + J$ é chamada montante e será representada por M. A razão $i = J/C$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros.

2.3 Conceitos básicos da MF

Nesta seção, explicaremos melhor os termos mencionados na última citação, acrescentando a eles o fluxo de caixa. A seguir, apresentamos um breve resumo destes conceitos:

- **Operação financeira**: execução de medidas com uma finalidade financeira.
- **Capital inicial** (C): dinheiro transacionado no início da operação financeira.
- **Juro** (J): remuneração do capital ou indenização por um prejuízo financeiro.
- **Montante** (M): capital inicial acrescido do juro, isto é, $M = C + J$.
- **Taxa de juro** (i): quociente J/C, que deve sempre ter um período de referência.
- **Prazo** (n): duração (em períodos da taxa) de uma operação financeira.
- **Fluxo de caixa**: conjunto de receitas e despesas ou uma destas movimentações.

2.3.1 Operação financeira

A partir do dicionário, *operação financeira* (ou comercial) pode ser entendida como a "execução de medidas consideradas necessárias à consecução de um objetivo financeiro" (FERREIRA, 2010). Como exemplos temos compras à vista e a prazo, descontos e aumentos sobre valores monetários, empréstimos bancários, investimentos financeiros, financiamentos, antecipações e atrasos de pagamentos, amortizações de dívidas.

Podemos considerar que o empréstimo é a operação fundamental da MF, pois, na maioria das operações financeiras, ou se toma dinheiro emprestado de alguém ou se empresta dinheiro para alguém. Este caso ocorre ao se realizar investimentos financeiros.

2.3.2 Capital inicial

Na MF, o *capital inicial*, cujo valor será denotado pela letra C, "é o recurso financeiro transacionado na data focal zero de determinada operação financeira" (CASTELO BRANCO, 2016). Esta data focal corresponde ao início da operação, que, não necessariamente, é "hoje", pois a operação pode ter começado num tempo pretérito ou pode ser planejada para iniciar num momento futuro.

Outras denominações que podem remeter à ideia de capital inicial são principal, valor presente, saldo inicial, dívida inicial, valor atual, valor líquido.

Aproveitamos o ensejo para ressaltar que, em MF, capitalizar significa "converter em capital", isto é, gerar dinheiro pela incorporação de juros ao principal. Reciprocamente, descapitalizar é reduzir este valor (FERREIRA, 2010).

2.3.3 Juro

Dos conceitos básicos da MF, certamente o mais importante é o de *juro*. A princípio, devemos compreender que a sua existência

> decorre do fato de que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens no presente e não no futuro. Em outras palavras, havendo uma preferência temporal para consumir, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio para que não haja consumo é o juro (MATHIAS, 2009).

Para Assaf Neto (2012), "postergar uma entrada de caixa por certo tempo envolve um sacrifício, o qual deve ser pago mediante uma recompensa, definida pelos juros".

O juro pode ser analisado sob duas perspectivas: de quem paga e de quem recebe. Para o pagador, o juro representa custo, despesa, perda, prejuízo. Para o recebedor, o juro é uma renda, uma receita, um ganho, um lucro (CASTELO BRANCO, 2016).

Segundo glossário do BCB, juro

> É o custo que se tem para "deslocar" o dinheiro no tempo. Assim, para emprestar a um cliente, no momento presente, certa quantia que ele só teria no futuro e depois de poupar por algum tempo, as instituições financeiras vão cobrar o pagamento não só da quantia emprestada, mas também um valor adicional. Esse valor adicional são os juros. Inversamente, se esse cliente depositar a mesma quantia em alguma aplicação do banco, vai esperar um valor maior quando fizer o resgate tempos depois. Nesse caso, é o banco que paga os juros por só devolver no futuro o dinheiro que recebeu em depósito no presente. Também é possível entender os juros como um "aluguel" que alguém paga por usar um dinheiro que não é seu (por exemplo, quando se pega um empréstimo, faz um financiamento ou compra a prazo) ou o "aluguel" que uma pessoa recebe por deixar outra pessoa utilizar o seu dinheiro (por exemplo, quando se coloca o dinheiro na caderneta de poupança).
> Exemplo de uso: Será que vale a pena eu pagar juros para comprar essa TV parcelada hoje ou eu posso esperar mais uns meses e comprar à vista, quem sabe com desconto? (BCB, 2013)

No Capítulo 5, analisaremos a atividade **A.1** , que trata de uma tomada de decisão como esta, mas substituímos a TV por algo muito mais útil - uma coleção de livros.

Os juros podem ser classificados como "remuneratórios ou moratórios". No primeiro caso, funcionam como aluguel pelo uso do dinheiro alheio. No segundo, são uma indenização pelo prejuízo resultante do atraso em um pagamento (PUCCINI, 2017).

Costuma-se denotar juro pela letra J. Ele é um valor monetário que não deve ser confundido com a *taxa de juro* (vide subseção 2.3.5).

2.3.4 Montante

O *montante* é o valor monetário acumulado resultante de uma operação financeira após determinado tempo, ou seja, é o capital acrescido de juros ao fim da capitalização (CASTELO BRANCO, 2016). Considerando que o capital C renda juro J, num certo intervalo de tempo, o montante gerado no final será $M = C + J$.

Valor futuro, soma, saldo final, dívida final, valor nominal, valor bruto são expressões que podem ser empregadas com o mesmo sentido de montante.

2.3.5 Taxa de juro

De modo geral, taxa de variação indica um acréscimo ou decréscimo relativo. Se uma grandeza passa do valor x para o valor y, sua taxa de variação é a razão do quanto variou $y-x$ pelo seu valor anterior x (MORGADO, 2005). Por isto, na MF, a *taxa de juro* é $i = J/C$, onde $J = M-C$ é o juro que o capital C rende para formar o montante M após certo tempo. Este intervalo temporal é o *período* da taxa, que sempre deve acompanhá-la. Os períodos mais comuns são ao ano, ao mês e ao dia.

O uso da letra i vem da denominação inglesa "interest rate" para "taxa de juro".

Exemplo 2.1: R\$ 100 geram R\$ 110, em 1 ano, mediante taxa de juro anual de $\frac{110-100}{100} = 10\% = 0{,}1$. Note: $110 = 100 + 100.(0{,}1) = 100.[1 + (0{,}1)] = 100.[1{,}1]$.

Exemplo 2.2: R\$ 100 se transformam em R\$ 90, após 1 ano, à taxa anual de juro $\frac{90-100}{100} = -10\% = -0{,}1$. Note: $90 = 100 + 100.(-0{,}1) = 100.[1 + (-0{,}1)] = 100.[0{,}9]$.

Um capital C, à taxa de juro i, gera o montante $C + C.i = C.(1+i)$, após 1 período de i. Os números 1,1 e 0,9 presentes nos dois últimos parágrafos são generalizados aqui pelo *fator de variação* $(1+i)$, que é um fator de aumento ou capitalização, quando $i > 0$, e um fator de desconto ou descapitalização, quando $i < 0$ (AMORIM, 2016).

Ressaltamos que, se considerarmos a taxa de juro positiva, há outros dois processos de capitalização e descapitalização que consistem em deslocar o dinheiro para o futuro e para o passado, respectivamente. Concentramos a nossa pesquisa nesta interpretação.

- Deslocando o capital C em 1 período de $i > 0$ no futuro, obtemos $M = C.(1+i)$ (neste caso, $(1+i)$ é fator capitalizante).

- Deslocando o montante M em 1 período de $i > 0$ no passado, obtemos $C = M.\frac{1}{(1+i)}$ (neste caso, $1/(1+i)$ é fator descapitalizante).

No exemplo 2.1, a partir da taxa $i = 10\%$ ao ano, capitalizamos 100 multiplicando-o por 1,1. Reciprocamente, podemos descapitalizar 110 aplicando-lhe o inverso deste fator de capitalização. Resumindo, $100.(1{,}1) = 110$ assim como $110.(1/1{,}1) = 100$.

Existem vários tipos de taxas de juros, como taxas de aumento e de desconto, taxas equivalentes, taxa acumulada e taxa média, taxa efetiva e taxa nominal, a taxa mínima (ou máxima) de atratividade, taxa interna de retorno, taxa de inflação, taxa Selic. Em momento oportuno veremos cada uma delas.

2.3.6 Prazo

Genericamente, o *prazo* de uma operação financeira é a sua duração. Este termo difere da expressão "a prazo", cujo significado é "com pagamento futuro" (FERREIRA, 2010). Por exemplo, uma compra a prazo feita em primeiro de janeiro de 2020 e quitada no dia primeiro de janeiro de 2021 é uma operação com prazo de 1 ano.

Sempre que o problema não tratar de "dias exatos" (ano civil de 365 dias) ou "dias úteis" (dias da semana exceto domingos e feriados), deve-se adotar o mês comercial de 30 dias. No exemplo anterior, mesmo sabendo que 2020 foi um ano bissexto de 366 dias, como isto não foi mencionado, então o ano será o comercial de 360 dias. Esta convenção foi motivada por uma questão financeira que vai além da simplificação de cálculos e está diretamente relacionada com a "regra de ouro", que veremos na subseção 2.4.1.

Neste contexto, a circular 2761 de 18/06/97 do BCB instituiu o ano de 252 dias úteis para cálculos de diarização ou anualização de taxas que considerem apenas tais dias.

Adotaremos aqui a letra n para designar um prazo, devido à sua associação com a quantidade de períodos da taxa que, a priori, é dada por um número natural. Mas, na verdade, pode ser qualquer número racional. Isto será esclarecido mais à frente.

Observamos que, para efeito de cálculos, a unidade de medida do prazo deve corresponder sempre à do período da taxa de juro. No empréstimo anterior com duração de um ano, sendo a taxa anual, o prazo é $n = 1$ ano, mas se a taxa for mensal, o prazo passa a ser $n = 12$ meses e, para uma taxa diária, teríamos $n = 360$ dias.

Na prática, o dia é a menor unidade de tempo utilizada como prazo de uma operação financeira. Entretanto, a abstração matemática permite explorar prazos infinitamente menores. Abordaremos com brevidade este assunto na subseção 2.4.3.

2.3.7 Fluxo de caixa

Fluxo de caixa (do inglês "cash flow") pode se referir a um conjunto de entradas (receitas) e saídas (despesas) de dinheiro (caixa) ao longo do tempo ou a uma movimentação financeira realizada em determinado momento (PUCCINI, 2017).

Dependendo do ponto de vista, um valor monetário pode significar receita ou despesa. Exemplos: o salário de um empregado é uma receita para ele e uma despesa para o seu patrão, um dinheiro tomado emprestado é receita para o devedor e despesa para o credor, uma quantia investida no Tesouro Nacional representa despesa para o investidor e receita para o Governo Federal.

Uma representação simples e muito útil para um fluxo de caixa é um diagrama de setas denotando movimentações financeiras no tempo, o qual é ilustrado em uma reta numérica horizontal orientada da esquerda para a direita. As entradas e saídas são expressas por seus valores nominais, atrelados às datas em que são registrados.

Uma quantia em dinheiro é um valor absoluto, mas, ao ser contextualizada num fluxo de caixa, adquire valor relativo. Esta relatividade costuma ser expressa pelos sinais $+$ e $-$. O sinal positivo acompanha as receitas e o negativo, as despesas. Esta é uma prática típica da Contabilidade, que Morgado (2005) denomina de "lógica do contador".

Entretanto, nos diagramas destes fluxos, indicaremos entradas e saídas por setas para cima e para baixo, respectivamente, sempre traçadas a partir do eixo do tempo. Na extremidade de cada seta, será expresso o valor nominal absoluto correspondente.

Ressaltamos, que os sinais relativizantes serão empregados em outras ocasiões, como na tabela do exemplo 2.4 (figura 2.3) e no uso da calculadora HP12c e do software Excel, conforme veremos no Capítulo 4.

Exemplo 2.3: empréstimo de 1000 reais (capital inicial), com quitação em 3 meses (prazo), mediante o pagamento de 1050 reais (montante). Esta movimentação pode ser representada pelos diagramas de fluxo de caixa nas figuras 2.1 e 2.2.

Figura 2.1: Fluxo de caixa do exemplo 2.3 na perspectiva do devedor.

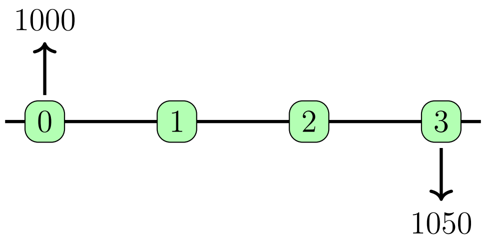
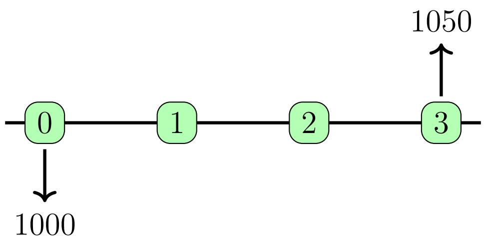


Figura 2.2: Fluxo de caixa do exemplo 2.3 na perspectiva do credor.



Observemos que, no exemplo 2.3, há juros de 50 reais ao trimestre, ou seja, a taxa de juro trimestral é $50/1000 = 5\% = 0{,}05$. Por isto, levamos R$ 1000 três meses adiante multiplicando-o por 1,05 (fator de capitalização) e trazemos R$ 1050 um trimestre para trás multiplicando-o por 1/1,05 (fator de descapitalização). Isto significa que, a 5% ao trimestre, 1000 no mês 0 e 1050 no mês 3 são valores iguais.

Também dizemos que 1000 é o *valor presente* (VP) de 1050 e que 1050 é o *valor futuro* (VF) de 1000. Este estudo será pormenorizado no Capítulo 3.

Esses deslocamentos de valores no tempo constituem a ideia fundamental da MF, que alicerça a almejada formação do *cidadão financeiro* (BCB, 2018). O diagrama de fluxo de caixa é uma ótima ferramenta para ajudar a visualizar estes deslocamentos. Porém esta não é a forma mais eficiente de representar um número elevado de movimentações financeiras, principalmente quando há várias delas na mesma data. Além disto, tal representação omite informações importantes como as descrições das entradas e saídas e os saldos periódicos. O formato tabular sana tais deficiências.

Exemplo 2.4: O orçamento de uma família durante janeiro de 2021 inicia com saldo positivo de 600 reais, seguido de variadas receitas e despesas, conforme a tabela abaixo.

Figura 2.3: Exemplo tabular de fluxo de caixa - planilha feita no Excel.

DATA	DESCRIÇÃO	VALOR	SALDO
01/01/2021	Saldo anterior	R$ 600,00	R$ 600,00
02/01/2021	Supermercado	-R$ 390,00	R$ 210,00
05/01/2021	Salário pai	R$ 2.950,00	R$ 3.160,00
05/01/2021	Salário mãe	R$ 3.020,00	R$ 6.180,00
11/01/2021	Plano de saúde	-R$ 800,00	R$ 5.380,00
11/01/2021	Celular	-R$ 90,00	R$ 5.290,00
11/01/2021	Internet	-R$ 75,00	R$ 5.215,00
11/01/2021	Escola	-R$ 800,00	R$ 4.415,00
11/01/2021	Bônus	R$ 170,00	R$ 4.585,00
12/01/2021	Combustível	-R$ 100,00	R$ 4.485,00
15/01/2021	Serviços	-R$ 700,00	R$ 3.785,00
15/01/2021	Cartão	-R$ 150,00	R$ 3.635,00
16/01/2021	Supermercado	-R$ 250,00	R$ 3.385,00
25/01/2021	Água	-R$ 105,00	R$ 3.280,00
25/01/2021	Luz	-R$ 132,00	R$ 3.148,00
25/01/2021	Condomínio	-R$ 500,00	R$ 2.648,00
26/01/2021	Combustível	-R$ 100,00	R$ 2.548,00
29/01/2021	Poupança	-R$ 1.000,00	R$ 1.548,00
31/01/2021	Lazer	-R$ 750,00	R$ 798,00

É perceptível a inviabilidade de se representar este fluxo de caixa num diagrama.

No Capítulo 4, mostraremos como construir esta planilha no Excel.

2.4 Regimes de Capitalização

Regime de capitalização é uma convenção de cálculo adotada para se obter o valor do montante em uma operação financeira. Os principais regimes de capitalização estudados na MF são o de juros compostos e o de juros simples (IEZZI, 2004).

Castelo Branco (2016) simplifica definindo estes regimes como “métodos pelos quais os capitais são remunerados”. Em seguida, ele mostra um quadro intuindo a existência de conexões entre juros compostos, crescimento exponencial e PG, bem como entre juros simples, crescimento linear e PA. Inspirados em quadros como este, criamos um diagrama resumo na subseção 2.4.5 (Figura 2.6), contendo os principais conceitos e resultados que estão sendo abordados aqui.

Puccini (2017) diz ainda que, “a rigor, o processo de capitalização só ocorre no regime de juros compostos”, porém “é comum o emprego da expressão capitalização simples para se referir ao crescimento do dinheiro no regime de juros simples”.

Existe também um regime de capitalização mista, que mescla juros compostos e juros simples. Versaremos sobre ele na subseção 2.4.8.

2.4.1 Juros Compostos e Juros Simples

No primeiro capítulo de Mathias (2009), afirma-se que

> Quando o regime é de juros simples, a remuneração pelo capital inicial aplicado é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. O fator de proporcionalidade é a taxa de juros.

No capítulo seguinte, é estabelecido que

> No regime de juros compostos, que tem grande importância financeira por retratar melhor a realidade, o juro gerado pela aplicação será incorporado à mesma passando a participar da geração de juros no período seguinte. Dizemos então que os juros são capitalizados, e como não só o capital inicial rende juros mas estes são devidos também sobre os juros formados anteriormente, temos o nome juros compostos (MATHIAS, 2009).

Castelo Branco (2016) faz acréscimos importantes ao apresentar os juros simples como sistema de capitalização linear fundamentado no conceito de PA e os juros compostos como sistema de capitalização exponencial fundamentado no conceito de PG. Segundo este autor, "o regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro".

A maioria das obras sobre MF aborda juros simples e compostos em capítulos distintos. Puccini (2017) também faz isto, porém inicia seu livro introduzindo estes regimes em parágrafos consecutivos, de modo similar à nossa proposta, exceto pela ordem:

> No regime de juros simples, (...) apenas o capital inicial (...) rende juros. (...) Nesse regime, os juros de cada período que não são pagos periodicamente não são somados ao capital para o cálculo dos juros nos períodos subsequentes. Consequentemente esses juros não pagos não são capitalizados nem rendem juros (...).
>
> No regime de juros compostos, (...) os juros de cada período que não forem pagos no final do período são somados ao capital e passam a fazer parte da base de cálculo dos juros para os períodos subsequentes. Nesse caso, as parcelas de juros que não forem pagas são automaticamente capitalizadas e passam a render juros nos próximos períodos.

O mesmo autor faz uma interessante ressalva quanto à legalidade na cobrança de juros compostos. Eles não significam obrigatoriamente uma infração da Lei (anatocismo), tendo em vista que só são cobrados "juros sobre juros" quando os mesmos não são pagos integralmente.

Morgado (2005) faz uma abordagem diferente dos demais autores mencionados, bem mais próxima da que proporemos aqui. Primeiro ele afirma que, "no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período". Posteriormente, após vários estudos pertinentes a esta forma de capitalização, é explicado que, "no regime de juros simples, os juros são calculados, em cada período, sobre o principal e não sobre o montante do período anterior". Ele comenta ainda que "em algumas poucas situações usam-se juros simples e não juros compostos" (o exemplo clássico é o juro de mora).

O fato de os juros simples serem raramente usados pode ser justificado pela irônica "regra de ouro", segundo a qual, "quem tem o ouro é quem faz as regras" (MORGADO, 2005). Desta forma, insinua-se que, em geral, é mais lucrativo para o credor emprestar dinheiro a juros compostos do que a juros simples. Adiante isto será exemplificado, generalizado por meio de fórmulas e visualizado graficamente.

A partir das definições apresentadas por Morgado (2005), Puccini (2011), Mathias (2009), Castelo Branco (2016) e outros, definimos os regimes de capitalização por recorrência (ver Apêndice D), logo abaixo.

Definição D-2.1: O regime de *juros compostos* caracteriza-se pela incidência da taxa de juro i sobre o último montante, isto é, sendo $M(n)$ o montante após n períodos inteiros de i, definimos $M(n+1) = M(n) + M(n).i = M(n).(1+i)$, onde $1+i$ é fator de variação.

Este regime ocorre tipicamente na cobrança de juros remuneratórios, cujos exemplos clássicos são os empréstimos e os investimentos financeiros.

Definição D-2.2: O regime de *juros simples* caracteriza-se pela incidência da taxa de juro i somente sobre o capital inicial C, isto é, sendo $M_s(n)$ o montante após n períodos inteiros de i, definimos $M_s(n+1) = M_s(n) + C.i$, onde $C.i$ é o juro periódico constante.

Este regime ocorre tipicamente na cobrança de juros moratórios, cujo exemplo clássico é a multa pelo atraso em um pagamento. Também é usado em descontos de títulos.

Uma maneira frequentemente usada em livros didáticos para comparar estes regimes de capitalização é analisar dois empréstimos, um em juros compostos e outro em juros simples. Entretanto, esta prática é uma incongruência, pois o empréstimo a juros simples não ocorre no mundo real. Para que não seja descartada tal comparação, tendo em vista sua importância para evidenciar algumas das principais características dos regimes de capitalização, podemos recorrer à divertida anedota que o professor Morgado costumava sugerir nas suas aulas de MF, quando dizia que, "por ser a favor de colocar as coisas no seu devido contexto, sempre apresentava os juros simples inserindo-os num conto de fadas". Ele contava que, somente devido à magia do "pó de pirilimpimpim", um credor aceitaria receber juros simples em vez de juros compostos relativos a um empréstimo. Este conto pode ser encontrado no vídeo Papmem (2015).

Exemplo 2.5: A tabela seguinte mostra como 100 reais evoluiriam à 10% ao ano, em capitalização composta e simples. No Capítulo 4, retomaremos esta tabela e mostraremos como reconstruí-la no Excel, ampliando a sua aplicabilidade.

Figura 2.4: Evolução de R$ 100,00 a 10% ao ano em juros compostos e juros simples.

Ano	Montante a juros compostos (empréstimo bancário)	Montante a juros simples (empréstimo fictício)
0	100,00	100,00
1	100,00 . (1,1) = 110,00	100,00 + (10,00) = 110,00
2	110,00 . (1,1) = 121,00	110,00 + (10,00) = 120,00
3	121,00 . (1,1) = 133,10	120,00 + (10,00) = 130,00
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

No Capítulo 4, mostraremos como construir esta e outras tabelas no Excel.

A primeira coluna exibe os anos completos. Na segunda coluna, o fator (1,1) decorre do fato que $C + (10\%).C = (1{,}1).C$ para todo $C \in \mathbb{R}$. Na terceira coluna, cada acréscimo de (10,00) representa o juro anual (10%).(100,00). A compreensão dos próximos resultados depende deste entendimento inicial.

Interessantes exercícios podem ser desenvolvidos a partir da tabela anterior. Por exemplo, o preenchimento de mais algumas linhas pode facilitar a identificação de padrões matemáticos nas sequências de montantes, permitindo observar que, para n anos, temos montantes $M(n+1) = M(n).(1{,}1)$ (em juros compostos) e $M_s(n+1) = M_s(n) + 10$ (em juros simples). Daí, pode-se conjecturar que $M(n) = 100\,.\,(1{,}1)^n$ e $M_s(n) = 100 + 10.n$. Estas noções intuitivas introduzem as formalizações que ocorrerão na subseção 2.4.2.

Em relação à intradisciplinaridade, tem-se aqui a oportunidade propícia para conectar a MF com outros dois conteúdos matemáticos de suma importância: funções (Apêndice G) e progressões (Apêndice H).

Obviamente, os montantes variam em função do tempo. Além disto, a sequência (100,00 ; 110,00 ; 121,00 ; 133,10 ; ...) é uma PG de razão 1,1, enquanto que a sequência (100 ; 110 ; 120 ; 130 ; ...) é uma PA de razão 10. Daí e das recorrências mencionadas em **D-2.1** e **D-2.2**, observa-se que os montantes crescem exponencialmente em juros compostos e linearmente em juros simples, o que remete aos conceitos de função exponencial e função polinomial do 1º grau (vide Apêndice I).

Estas conexões serão generalizadas nas próximas subseções.

2.4.2 Principais fórmulas da MF

As fórmulas a seguir expressam montantes em função do tempo.

Teorema T-2.1: No regime de juros compostos, o capital C, à taxa de juro i, após n períodos inteiros desta taxa, produz o montante $M(n) = C.(1+i)^n$.

Teorema T-2.2: No regime de juros simples, o capital C, à taxa de juro i, após n períodos inteiros desta taxa, produz o montante $M_s(n) = C.(1+i.n)$.

No universo $\mathbb{N}$, estes teoremas resultam das caracterizações das sequências dos montantes a juros compostos como PG e dos montantes a juros simples como PA. Com efeito, por definição, $M(n+1) = M(n).(1+i)$ e $M_s(n+1) = M_s(n) + C.i$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, percebemos que $(M(n)) = (M(1)\ ;\ M(2)\ ;\ M(3)\ ;\ ...)$ é PG de razão $1+i$, assim como $(M_s(n)) = (M_s(1)\ ;\ M_s(2)\ ;\ M_s(3)\ ;\ ...)$ é PA de razão $C.i$. Além disto, estas progressões têm primeiro termo $C.(1+i)$, pois nos dois regimes, o capital C à taxa i rende juros $C.i$ após 1 período de i: $M(1) = M_s(1) = C + C.i = C.(1+i)$. Logo,

- $M(n) \overset{\text{TPG}}{=} M(1).(1+i)^{n-1} = C.(1+i).(1+i)^{n-1} = C.(1+i)^n$;
- $M_s(n) \overset{\text{TPA}}{=} M_s(1) + C.i.(n-1) = C.(1+i) + C.(i.n - i) = C.(1+i.n)$.

Esta demonstração exige o estudo prévio de progressões, que resumimos no Apêndice H. Porém, os teoremas **T-2.1** e **T-2.2** também podem ser obtidos a partir de $n-1$ igualdades $M(k+1) = M(k).(1+i)$ e $M_s(k+1) = M_s(k) + C.i$, ambas com k inteiro variando de 1 a $n-1$. Basta multiplicar membro a membro o primeiro grupo e adicionar membro a membro o segundo.

Importante perceber que esses teoremas generalizam o crescimento exponencial dos montantes a juros compostos e o crescimento linear dos montantes a juros simples, que havíamos observado anteriormente para casos particulares.

Concretizaremos melhor estes teoremas nas atividades do Capítulo 5.

Notemos ainda que $C = C.(1+i)^0 = M(0)$ e que $C = C.(1+i.0) = M_s(0)$. Logo, os teoremas em questão valem para todo prazo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Um processo usual para se conjecturar essas fórmulas ocorre a partir da tabela anterior (figura 2.4), no caso particular em que $C = 100$ reais e $i = 10\%$ ao mês, conforme recomendamos na subseção 2.4.1, quando presumimos que $M(n) = 100.(1+10\%)^n$ e que $M_s(n) = 100.(1+10\%.n)$. Em seguida, basta generalizar para C e i quaisquer. Este entendimento é importante, mas é intuitivo, incompleto, informal.

A validade de uma regra para 1, 2, 3 até um número natural "grande", por maior que seja, não prova que valha em $\mathbb{N}$. A formalização disto ocorre pelo *Princípio de Indução*

Finita (*PIF*), segundo o qual verifica-se que a regra vale para 1 e, supondo que valha para um número natural arbitrário, prova-se que vale para o seu sucessor (Apêndice D).

Demonstramos **T-2.1** pelo *PIF*, verificando que $M(1) = C.(1+i)^1$ e obtendo a tese $M(n+1) = M(n).(1+i) = C.(1+i)^n.(1+i) = C.(1+i)^{n+1}$, a partir da hipótese que $M(n) = C.(1+i)^n$ para um $n \in \mathbb{N}$. O **T-2.2** pode ser provado analogamente pelo *PIF*, mas é desnecessário, pois, o juro $C.i$ a cada período da taxa faz com que os juros após n destes períodos sejam $J = C.i.n$, donde $M_s(n) = C + J = C.(1+i.n)$.

Cada um desses teoremas estabelece uma relação entre quatro variáveis, de modo que, conhecendo-se três delas, é possível determinar a quarta. Daí, inspirados pela notação do Excel, também denotaremos $M(n) = M(C\,;i\,;n)$ e $M_s(n) = M_s(C\,;i\,;n)$. Por exemplo, em vez de dizermos que 100 reais à taxa anual de 10%, após 3 anos, se transformam em 133,10 reais, se os juros forem compostos, e em 130, se os juros forem simples, podemos escrever apenas $M(100\,;10\%\,;3) = 133{,}10$ e $M_s(100\,;10\%\,;3) = 130$.

Vejamos como obter uma variável a partir das outras. Se $M(C\,;10\%\,;3) = 133{,}10$, isto é, se $C.(1+10\%)^3 = 133{,}1$ então $C.(1{,}331) = 133{,}1$, donde $C = 100$ (reais). Se $M(100\,;i\,;3) = 133{,}10$, isto é, se $100.(1+i)^3 = 133{,}1$ então $1+i = (1,331)^{1/3} = 1,1$, donde $i = 0,1 = 10\%$ (ao ano). Se $M(100\,;10\%\,;n) = 133{,}10$, isto é, se $100.(1+10\%)^n = 133{,}1$ então $(1,1)^n = 1,331 = (1,1)^3$, donde $n = 3$ (anos).

Analogamente, partimos das equações $M_s(C\,;10\%\,;3) = 130$, $M_s(100\,;i\,;3) = 130$ e $M_s(100\,;10\%\,;n) = 130$ para obter $C = 100$, $i = 10\%$ e $n = 3$, respectivamente.

Até aqui vimos apenas prazos inteiros não negativos, mas também podemos considerá-los negativos. Um prazo menor que zero denota o deslocamento de um valor monetário para o passado, num processo de descapitalização similar ao da capitalização. Descapitalizar C reais, mediante a taxa de juros i, em n períodos de i, significa dividir C por $(1+i)^n$, no regime de juros compostos, ou subtrair $C.i.n$ de C, no regime de juros simples. Daí, deduzimos que $M(C\,;\ i\,;\ -n) = C.\big[1+i\big]^{(-n)}$ e $M_s(C;\ i\,;\ -n\,) = C.\big[1+i.(-n)\big]$, com $n \in \mathbb{N}$. Justificamos assim a validade de **T-2.1** e **T-2.2** para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A partir do conceito de próxima subseção, ampliaremos a validade destes teoremas para o universo $\mathbb{Q}$ e, na subseção 2.4.7, veremos como as últimas fórmulas se relacionam com descontos.

2.4.3 Taxas de juros equivalentes

Segundo Mathias (2009), "duas taxas se dizem equivalentes se, aplicado um mesmo capital às duas taxas e pelo mesmo intervalo de tempo, ambas produzirem o mesmo juro" e, consequentemente, o mesmo montante.

Convencionando i_a, i_s, i_q, i_t, i_b, i_m e i_d para taxas de juros anual, semestral, quadrimestral, trimestral, bimestral, mensal e diária, respectivamente, determinemos as condições para que estas taxas sejam equivalentes em cada regime de capitalização. Para tal, basta observar que 1 ano = 2 semestres = 3 quadrimestres = 4 trimestres = 6 bimestres = 12 meses = 360 dias (considerando o mês comercial de 30 dias).

No regime de juros compostos, temos $C.(1+i_a)^1 = C.(1+i_s)^2 = C.(1+i_q)^3 = C.(1+i_t)^4 = C.(1+i_b)^6 = C.(1+i_m)^{12} = C.(1+i_d)^{360}$, donde $1+i_a = (1+i_s)^2 = (1+i_q)^3 = (1+i_t)^4 = (1+i_b)^6 = (1+i_m)^{12} = (1+i_d)^{360}$. Analogamente, em juros simples, temos $C.(1+1.i_a) = C.(1+2.i_s) = C.(1+3.i_q) = C.(1+4.i_t) = C.(1+6.i_b) = C.(1+12.i_m) = C.(1+360.i_d)$, donde $i_a = 2.i_s = 3.i_q = 4.i_t = 6.i_b = 12.i_m = 360.i_d$.

Os 10% ao ano do exemplo 2.5, na capitalização composta, equivalem à taxa mensal i_m tal que $(1+i_m)^{12} = (1+10\%)^1$, donde $i_m = (1+10\%)^{1/12} - 1 \cong 0{,}008 = 0{,}8\%$. Se considerarmos juros simples, os mesmos 10% ao ano correspondem à taxa mensal $10\%/12 \cong 0{,}8333\%$. Retomaremos estes resultados no estudo das taxas efetiva e nominal.

Para generalizar a equivalência de taxas de juros, tomemos o capital C e as taxas i_x ao período x e i_y ao período y, sendo x e y intervalos de tempo quaisquer. Supondo que p períodos x correspondam a q períodos y, temos:

- i_x e i_y equivalentes em juros compostos se $M(C\,;\,i_x\,;\,p) = M(C\,;\,i_y\,;\,q)$, isto é, $C.(1+i_x)^p = C.(1+i_y)^q$, donde $(1+i_x)^p = (1+i_y)^q$;
- i_x e i_y equivalentes em juros simples quando $M_s(C;i_x;p) = M_s(C;i_y;q)$, isto é, $C.(1+i_x.p) = C.(1+i_y.q)$, donde $i_x.p = i_y.q$.

Daí, se p períodos x correspondem a 1 período y, temos $(1+i_x) = (1+i_y)^{1/p}$, na capitalização composta, ou $i_x = i_y/p$, na capitalização simples. Assim, dado o prazo n/p em períodos x, com $n \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{N}$, temos $M(C;i_x;n) = C.\left[1+i_x\right]^n = C.\left[(1+i_y)^{1/p}\right]^n = C.\left[1+i_y\right]^{n/p} = M(C;i_y;n/p)$ ou $M_s(C;i_x;n) = C.\left[1+i_x.n\right] = C.\left[1+(i_y/p).n\right] = C.\left[1+i_y.n/p\right] = M_s(C;i_y;n/p)$. Deste modo, estendemos **T-2.1** e **T-2.2** para $n \in \mathbb{Q}$.

Também é possível estendê-los ao conjunto $\mathbb{R}$, mas consideramos desnecessário aprofundar este estudo no Ensino Médio, pois, na prática cotidiana, a MF não opera com prazos irracionais. Para incidência de taxas de juros, os dias não costumam, sequer, ser divididos em horas, minutos, segundos. Caso algum problema exija isto, a equivalência de taxas que vimos até aqui é suficiente para resolver.

A referida ampliação ocorre a partir do conceito de *taxa instantânea de juro*, que caracteriza a *capitalização contínua* (Apêndice J). Detalhá-la vai além dos nossos objetivos, mas observamos que ela pode ser encontrada em faturamentos de supermercados, na formação do custo de fabricação em um processo fabril e na depreciação de um equipamento - casos em que a capitalização se forma continuamente; não apenas ao final de um só período (ASSAF NETO, 2012).

Como o regime padrão é o de juros compostos, costuma-se subentendê-lo para taxas equivalentes. Em juros simples, taxas que se equivalem são ditas proporcionais.

O conceito de taxas equivalentes remete a outras taxas, como a *taxa acumulada*, a *taxa média*, a *taxa efetiva* e a *taxa nominal*.

Se você aplicar hoje 100 à 10% ao ano, terá 100.(1 + 10%) = 110 após 1 ano. Se reaplicar seu dinheiro à 20% ao ano, no final do 2º ano, terá 110.(1+20%) = 132. Logo, existe uma taxa bienal acumulada de 32%, que equivale às sucessivas taxas anuais de 10% e 20%. A taxa média destas duas taxas é a forma equivalente anual daquela: $(1+32\%)^{1/2}-1 \cong 14,89\%$. Note que $100.(1+14,89\%)^2 \cong 132$.

De modo geral, se n taxas i_1, i_2, i_3, ..., i_n, igualmente periodizadas, incidem sucessivamente sobre o capital C, então, após n períodos de i_k (k inteiro de 1 a n), temos o montante $C.(1+i_1).(1+i_2).(1+i_3).\ldots.(1+i_n) = C.\prod_{k=1}^{n}(1+i_k)$.

A taxa acumulada destas n taxas gera o mesmo montante que elas, incidindo uma única vez sobre C. Sua equivalente ao período de i_k é a taxa média das referidas n taxas. Assim, denotando a taxa acumulada por i_{ac} e a taxa média por $i_{\text{média}}$, definimos: $M(C\,;i_{\text{ac}}\,;1) = C.\prod_{k=1}^{n}(1+i_k) = M(C\,;i_{\text{média}}\,;n)$. Daí, $1+i_{\text{ac}} = \prod_{k=1}^{n}(1+i_k) = (1+i_{\text{média}})^n$.

Notemos que $i_{\text{média}}$ e i_{ac} são taxas equivalentes e que $1+i_{\text{média}}$ é a *média geométrica* de $(1+i_k)$ com $1 \leq k \leq n$.

Estas taxas se relacionam com o estudo de aumentos e descontos sucessivos. É pertinente retomarmos aqui os exemplos 2.1 e 2.2, que tratam, respectivamente, de um aumento e de um desconto. A primeira taxa de juro considerada é de 10% ao ano e a segunda é de -10% ao ano. Supondo que estas taxas incidam sucessivamente sobre um capital, temos a taxa bienal acumulada $i_{\text{ac}} = (1+10\%).(1-10\%)-1 = -0,01 = -1\%$. A taxa média anual é $i_{\text{média}} = (1-1\%)^{1/2}-1 \cong -0,00501 = -0,501\%$.

Em um contexto cotidiano, podemos pensar numa loja que oferece 10% de desconto em todos os seus produtos, após ter aumentado seus preços em 10%. Notemos que o desconto, na realidade, é de 1%. Esta é uma estratégia comercial muito utilizada em promoções, a fim de atrair clientes desinformados.

Outra observação importante é o fato contraintuitivo de que as taxas sucessivas de 10% e -10% não se anulam.

Neste contexto, destacamos ainda a *inflação* e a *Selic*. A taxa de inflação representa um aumento médio de preços. A taxa Selic é a "média das taxas de juros praticadas nas operações compromissadas de prazo de um dia útil com lastro em títulos públicos federais registrados no Sistema Especial de Liquidação e de Custódia" (BCB, [202?]). A Selic funciona como taxa básica de juros da economia.

De acordo com Puccini (2017), taxa efetiva é a taxa de juros em que a unidade referencial de seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização e taxa nominal é aquela em que tal coincidência não ocorre. Apesar de bastante utilizada no mercado, a taxa nominal não fornece os juros reais, pois ela traz uma taxa efetiva implícita, que é a taxa de juros a ser aplicada em cada período de capitalização e seu cálculo deve ser de "forma proporcional". Neste contexto, Morgado (2005) considera que o anúncio de taxas nominais é um péssimo hábito e que estas são taxas falsas, enquanto que verdadeiras são as taxas efetivas.

Retomando novamente o exemplo 2.5, podemos considerar que os 10% ao ano em juros compostos sejam uma taxa efetiva e que os 10% ao ano em juros simples sejam uma taxa nominal capitalizada mensalmente. Conforme vimos, 10% ao ano equivale a 0,8% ao mês (na capitalização composta) e é proporcional 0,8333% ao mês. Isto significa que 10% ao ano com capitalização mensal é uma taxa nominal, cujo valor efetivo mensal é 0,8333%, que, por sua vez, equivale à taxa anual $(1 + 0{,}8333\%)^{12} - 1 \cong 0{,}1047 = 10{,}47\%$.

Provavelmente, a taxa nominal foi criada como estratégia comercial para esconder a taxa efetiva, pois esta sempre supera aquela. Demonstremos isto para a taxa nominal i_{nom} ao ano capitalizada mensalmente, cuja taxa efetiva anual correspondente é i_{efet}. De modo similar ao cálculo anterior, $i_{\text{efet}} = (1 + i_{\text{nom}}/12)^{12} - 1 \overset{\text{BN}}{=} \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k}.1^{12-k}.(i_{\text{nom}}/12)^k - 1 = \binom{12}{0}.(i_{\text{nom}}/12)^0 + \binom{12}{1}.(i_{\text{nom}}/12)^1 + \cdots + \binom{12}{12}.(i_{\text{nom}}/12)^{12} - 1 = 1 + i_{\text{nom}} + \cdots + (i_{\text{nom}}/12)^{12} - 1 = i_{\text{nom}} + \cdots + (i_{\text{nom}}/12)^{12} > i_{\text{nom}}$. Na passagem indicada por BN, utilizamos o desenvolvimento binomial de Newton (outra oportuna abordagem intradisciplinar). Analogamente, prova-se que $i_{\text{efet}} > i_{\text{nom}}$ caso esta taxa nominal tenha capitalização bimestral, trimestral, quadrimestral ou semestral, substituindo o número 12 por 6, 4, 3 ou 2, respectivamente.

2.4.4 Gráficos de montantes em juros compostos e juros simples

Retomemos a evolução de 100 reais à 10% ao ano, em juros compostos e em juros simples, tabelada na figura 2.4 e representada algebricamente por $M(n) = 100.(1,1)^n$ e $M_s(n) = 10.n + 100$. Estas fórmulas, obtidas inicialmente de modo intuitivo, foram generalizadas em **T-2.1** e **T-2.2**. Daí, esta evolução de valores no tempo fica melhor representada por pontos de uma "linha" no plano cartesiano do que na forma tabular.

No capítulo 4, utilizaremos o Excel para representar graficamente estas funções (figura 4.4), mas antes, o aluno deve ser estimulado a esboçar manualmente estes gráficos a partir da localização de alguns pontos no plano cartesiano. Por exemplo, temos os seguintes pontos:

$$\begin{array}{ll}
\text{A} = (0\,;\, M(0)) = (0\,;\, 100{,}00), & \text{E} = (0\,;\, M_s(0)) = (0\,;\, 100{,}00),\\
\text{B} = (1\,;\, M(1)) = (1\,;\, 110{,}00), & \text{F} = (1\,;\, M_s(1)) = (1\,;\, 110{,}00),\\
\text{C} = (2\,;\, M(2)) = (2\,;\, 121{,}00), & \text{G} = (2\,;\, M_s(2)) = (2\,;\, 120{,}00),\\
\text{D} = (1/2\,;\, M(1/2)) = (1/2\,;\, 104{,}88), & \text{H} = (1/2\,;\, M_s(1/2)) = (1/2\,;\, 105{,}00).
\end{array}$$

Importante notar que A = E, B = F, que E, F, G, H são colineares e que A, B, C, D não são. A colinearidade de E, F, G, H se deve ao fato de $M_s(n) = 10.n + 100$

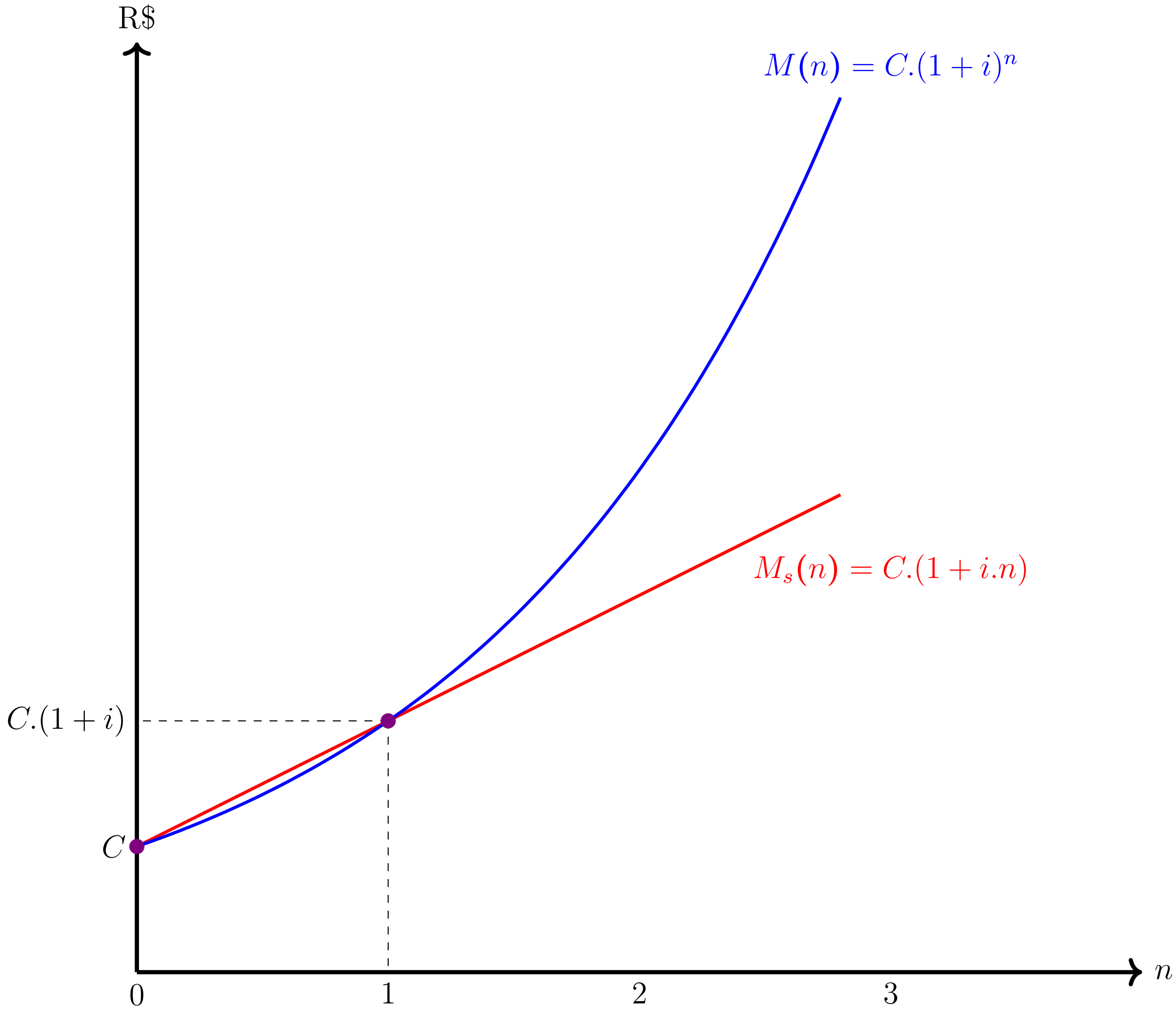
caracterizar uma função polinomial do 1º grau. Assim como a função exponencial dada por $M(n) = 100.(1,1)^n$ garante que A, B, C, D pertencem a uma curva.

Nas notações de **T-2.1** e **T-2.2**, a situação anterior é generalizada para quaisquer constantes reais positivas C (capital inicial) e i (taxa de juro), definindo $M(n) = C.(1+i)^n$ e $M_s(n) = C.(1+i.n) = (C.i).n + C$, para todo $n \in \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ (prazo em períodos de i).

A função M é exponencial com base $1 + i > 1$ e M_s é função polinomial do 1º grau com taxa de crescimento $C.i > 0$. Logo, temos duas funções crescentes, sendo M representada graficamente por pontos de uma curva ascendente e côncava para cima e M_s por pontos de uma semirreta ascendente, ambas partindo do ponto $(0\,;\,C)$.

Esboçamos estes gráficos na figura 2.5, destacando alguns pontos importantes como $(0\,;\,M(0)) = (0\,;\,M_s(0)) = (0\,;\,C)$ e $(1\,;\,M(1)) = (1\,;\,M_s(1)) = (1\,;\,C.(1+i))$.

Figura 2.5: Gráficos de montantes em função do tempo.



Constatamos assim, a coerência daquela primeira ideia intuitiva de comparação entre os montantes a juros compostos e simples que, simbolicamente, resumimos nas três propriedades a seguir:

- $M(n) = M_s(n) \iff n = 0 \;\text{ ou }\; n = 1\,,$
- $M(n) > M_s(n) \iff n > 1\,,$
- $M(n) < M_s(n) \iff 0 < n < 1\,.$

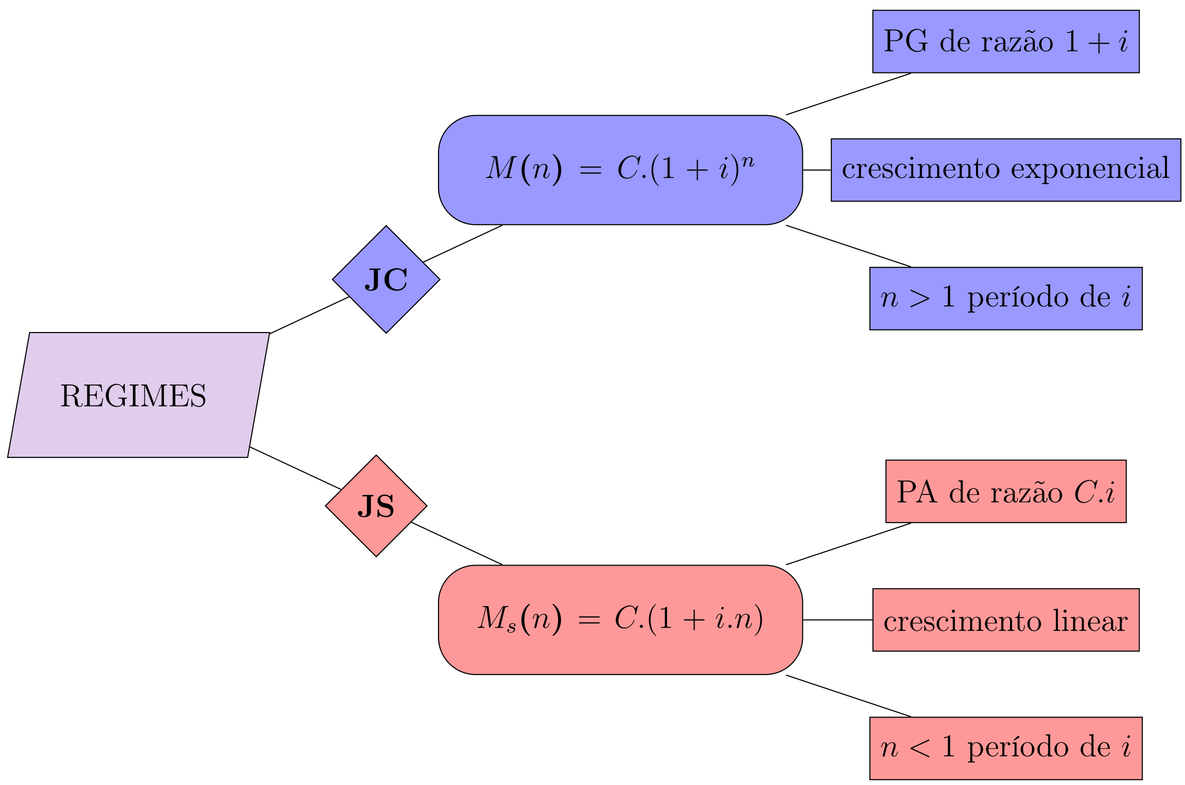
Retomaremos análises gráficas na atividade **A.2** (Capítulo 5), onde também veremos um gráfico de capitalização mista (assunto a ser tratado na subseção 2.4.8).

Podemos provar que $M(n) \geq M_s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pela *desigualdade de Bernoulli* (vide Apêndice D).

2.4.5 Diagrama resumo sobre juros compostos e juros simples

Organizamos os principais conceitos e resultados que fundamentam a MF no de diagrama abaixo, onde abreviamos juros compostos por **JC** e juros simples por **JS**.

Figura 2.6: Diagrama Resumo de Matemática Financeira.



2.4.6 Fluxos de caixa equivalentes

Segundo Puccini (2017), fluxos de caixa são equivalentes, a uma dada taxa de juros, quando seus valores presentes, calculados com esta taxa, são iguais. Esta equivlência é sempre analisada no regime de juros compostos. Logo, utilizamos **T-2.1**.

Exemplo 2.4: Um empréstimo com juros de 10% ao mês pode ser pago de 2 modos:

(**1**) Com desembolso único de 3993 reais após 3 meses. Neste caso, o valor presente é $\text{VP}_{((\mathbf{1})\,;\,10\%)} = 3993.(1+10\%)^{-3} = 3000$.

(**2**) Em três mensalidades de 1100, 1210, 1331 reais. Nesta opção, o valor presente é $\text{VP}_{((\mathbf{2})\,;\,10\%)} = 1100.(1+10\%)^{-1} + 1210.(1+10\%)^{-2} + 1331.(1+10\%)^{-3} = 3000$.

Como $\text{VP}_{((\mathbf{1})\,;\,10\%)} = \text{VP}_{((\mathbf{2})\,;\,10\%)}$, então os fluxos de caixa nas duas formas de pagamento são equivalentes (vide figuras 2.7 e 2.8).

Figura 2.7: Fluxo de caixa (**1**) - empréstimo de R$ 3000 quitado de uma vez.

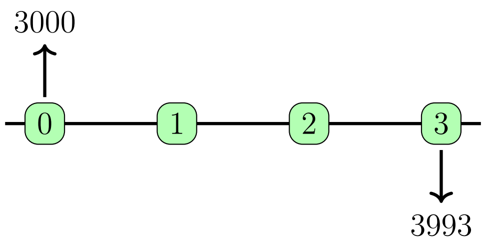
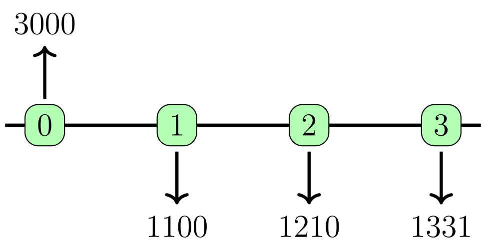


Figura 2.8: Fluxo de caixa (**2**) - empréstimo de R$ 3000 quitado em 3 vezes.



2.4.7 Desconto de título

Já vimos descontos no sentido geral de subtrair, abater, reduzir, descapitalizar. Nos descontos de títulos, esta ideia básica será ampliada e especificada.

Título é um documento, em geral negociável, que representa um valor (FERREIRA, 201). Este é o valor nominal do título na data que ele vence.

Entre os títulos de débito podemos citar as prestações de empréstimos ou financiamentos. Como títulos de crédito, temos, principalmente, cheques, duplicatas, notas promissórias e letras de câmbio.

O desconto de um título caracteriza-se pelo seu pagamento (efetuado ou recebido) antes do vencimento. Em termos absolutos, o valor do desconto é $D = N - A$, onde N é o valor nominal do título e A é o seu valor atual, na data do pagamento.

Definimos que os juros no prazo n são a diferença entre o montante no fim deste prazo e o capital no início dele. Apesar de serem conceitos distintos, percebe-se que A, N e D exercem funções similares às do capital inicial, montante e juros, respectivamente.

Quando o desconto é dado pelo deslocamento de N para o passado, calculamos o *desconto por dentro* ou *desconto racional*, cujo valor é denotado por D_r. Neste caso, a taxa de juro corrente $i > 0$, que transforma A em N, é também dita taxa de desconto racional ou por dentro.

Esta taxa i difere da taxa d do *desconto por fora* ou *desconto comercial*, porque d incide diretamente sobre N para a obtenção do valor a ser descontado. Indicamos por D_c o desconto calculado desta forma.

Considerando a taxa de desconto racional i e a taxa de desconto comercial d periodizada conforme i,

- se a operação de desconto adotar regime de juros compostos, então
  (a) $A = \frac{N}{(1+i)^n}$ e $D_r = N.\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$ (desconto racional composto);
  (b) $A = N.(1-d)^n$ e $D_c = N.\left[1 - (1-d)^n\right]$ (desconto comercial composto);
- se a operação de desconto adotar regime de juros simples, então
  (c) $A = \frac{N}{1+i.n}$ e $D_r = \frac{N.i.n}{1+i.n}$ (desconto racional simples);
  (d) $A = N.(1-d.n)$ e $D_c = N.d.n$ (desconto comercial simples).

As fórmulas do item (a) resultam imediatamente de **T-2.1** e da definição geral de desconto. No item (b), A decorre do fato que $M - d.M$ é o valor M descontado por 1 período de d (esta demonstração é facilmente formalizada pelo PIF) e D_c vem daí e da definição geral de desconto. O item (c) é consequência imediata de **T-2.2** e da definição geral de desconto. No item (d), D_c decorre do conceito de juros simples e A resulta daí e da definição geral de desconto.

Nos itens (a), (b), (c) e (d), escrevemos A, D_r e D_c em função de N, n e i porque, na prática, estes valores costumam ser os conhecidos. Enquanto que, normalmente, A é a incógnita a ser descoberta. Porém, é importante observar que, no item (c), também temos $D_r = A.i.n$, a fim de compararmos com o item (d): $D_c = N.d.n$. Estas fórmulas justificam as denominações desconto por dentro e desconto por fora.

Observemos que, no item (a), temos $A = M(N; i; -n)$ e $N = M(A; i; n)$, em (d), temos $A = M_s(N; d; -n)$, mas $N \neq M_s(A; d; n)$, e, em (c), $N = M_s(A; i; n)$.

Existe ainda uma ressalva quanto à taxa d, pois um desconto por fora de 100% significa $A = 0$. Como praticamente nada é de graça, devemos considerar $d < 100\%$.

Notemos que, como A não varia, devemos ter $\frac{N}{(1+i)^n} = N.(1-d)^n$, em juros compostos, e $\frac{N}{1+i.n} = N.(1-d.n)$, em juros simples. Da primeira equação, obtemos $d = 1 - \frac{1}{1+i}$ e $i = \frac{1}{1+d} - 1$. Da segunda equação, obtemos $d = \frac{i}{1+i.n}$ e $i = \frac{d}{1-d.n}$.

Exemplo 2.5: Suponhamos um título com rentabilidade de 20% ao ano e valor nominal de mil reais. Para resgatá-lo 2 meses antes do vencimento, haverá um desconto. Calculando por dentro, temos o valor atual (na data antecipada) $\frac{1000}{(1+20\%)^{2/12}} \cong 970{,}07$, em juros compostos, ou $\frac{1000}{1+(20\%).(2/12)} \cong 967{,}74$, em juros simples. Para descontar por fora, precisamos da taxa anual de desconto comercial correspondente aos 20% anuais. No regime composto, esta taxa é $1 - \frac{1}{1+20\%} \cong 0{,}16667$ e, no simples, é $\frac{20\%}{1+(20\%).(2/12)} \cong 0{,}19355$. Aplicando-as nas fórmulas dos itens (b) e (d), obtemos os valores atuais anteriores.

Teoricamente, todo desconto deveria ser interpretado como uma descapitalização composta. Porém, no mercado, prevalece a "regra de ouro" (subseção 2.4.1), de modo que quem o oferece o desconto tende a optar pelo que lhe for mais lucrativo. Assim, costuma-se descontar a juros compostos somente no pagamento antecipado de uma prestação a vencer. Enquanto que, no resgate antecipado de títulos de crédito, os bancos operam com o desconto comercial simples que, por isto, também é denominado *desconto bancário*.

Na prática, existem ainda cobranças não inclusas nas taxas de desconto, como as tarifas administrativas e o IOF (Imposto sobre Operações Financeiras).

2.4.8 Capitalização mista

Conforme dissemos antes, devido à "regra de ouro", é prática comum do mercado adotar o regime de juros simples excepcionalmente para prazos menores que o período da taxa de juro utilizada. Isto porque, nestes prazos fracionários, os juros simples superam os juros compostos.

Definição D-2.3: O regime de *capitalização mista* caracteriza-se pela adoção de uma *convenção linear específica* que admite a formação de juros compostos para a parte interia do prazo e de juros simples para a parte não inteira do mesmo (ASSAF NETO, 2012).

Exemplo 2.5: Consideremos a aplicação de 100 reais, à 10% ao ano, neste regime misto, e obtenhamos o montante após 3 anos e 144 dias, isto é, 3,4 anos. Seja $\mu(C\,;i\,;n)$ o montante gerado pela capitalização mista de C, à taxa de juro i, após n períodos de i. Por definição, $\mu(100\,;10\%\,;3) = M(100\,;10\%\,;3) = 100.(1{,}1)^3 = 133{,}10$ e esta quantia, após 0,4 do quarto ano, irá gerar o montante $\mu(100\,;10\%\,;3{,}4) = M_s(133{,}10\,;10\%\,;0{,}4)$ $= 133{,}10.\big[1 + (10\%).(0{,}4)\big] \cong 138{,}42$.

Daí, percebemos que $\mu(100\,;\,10\%\,;\,3{,}4) = M_s(M(100\,;\,10\%\,;\,3)\,;\,10\%\,;\,0{,}4)$.

A convenção linear da capitalização mista funciona como uma regra de *proporcionalidade* ou uma *interpolação linear*, assim como ocorre nos juros simples. Com efeito, a diferença $M(100\,;10\%\,;4) - M(100\,;10\%\,;3)$ está para 1 ano assim como a diferença $\mu(100\,;10\%\,;3{,}4) - M(100\,;10\%\,;3)$ está para 0,4 do ano, ou seja, $\mu(100\,;10\%\,;3{,}4)$ é soma de $M(100\,;10\%\,;3)$ com 0,4 dos juros que são produzidos do 3º para o 4º ano.

Podemos contextualizar este exemplo em uma aplicação prática, considerando que R$ 133,10 é o valor de uma conta a ser paga em determinada data e que, devido ao atraso de 144 dias no pagamento, sejam cobrados juros de mora no valor de R$ 5,32, decorrentes da incidência da taxa anual de 10% de juros simples sobre o valor da dívida, no prazo de 0,4 ano: (133,10).(10%).(0,4). Com efeito, 133,10 + 5,32 = 138,42.

Outra possibilidade é considerar que $A = 138{,}42$ seja o valor atual de um título com valor nominal $N = 146{,}41 = M(100\,;10\%\,;4)$, cujo resgate ocorreu 216 dias (0,6 ano) antes do vencimento. Neste caso, pelo que vimos na subseção 2.4.7, a taxa de desconto é $d = 1 - 1/(1 + 10\%) \cong 0{,}09091$ ao ano. De fato, temos o desconto comercial simples $D_c = (146{,}41).(0{,}09091).(0{,}6) \cong 7{,}99$. Assim, verificamos que $A = 146{,}41 - 7{,}99$.

Das duas últimas situações, podemos deduzir a motivação para o uso de juros simples excepcionalmente para prazos menores que 1 período da taxa de juro. Já falamos sobre isto anteriormente, mas é bom lembrar que tudo está relacionado com a "regra de ouro".

Neste contexto, ressaltamos que $M(100\,;10\%\,;3{,}4) = 100.(1 + 10\%)^{3{,}4} \cong 138{,}27 <$ $\mu(100\,;10\%\,;3{,}4)$. Isto é facilmente generalizado a partir do que vimos na subseção 2.4.4, ou seja, fixados C e i positivos, temos $M(C\,;i\,;n) \leq \mu(C\,;i\,;n)$, para qualquer n. A igualdade ocorre se, e somente se, $n \in \mathbb{Z}$.

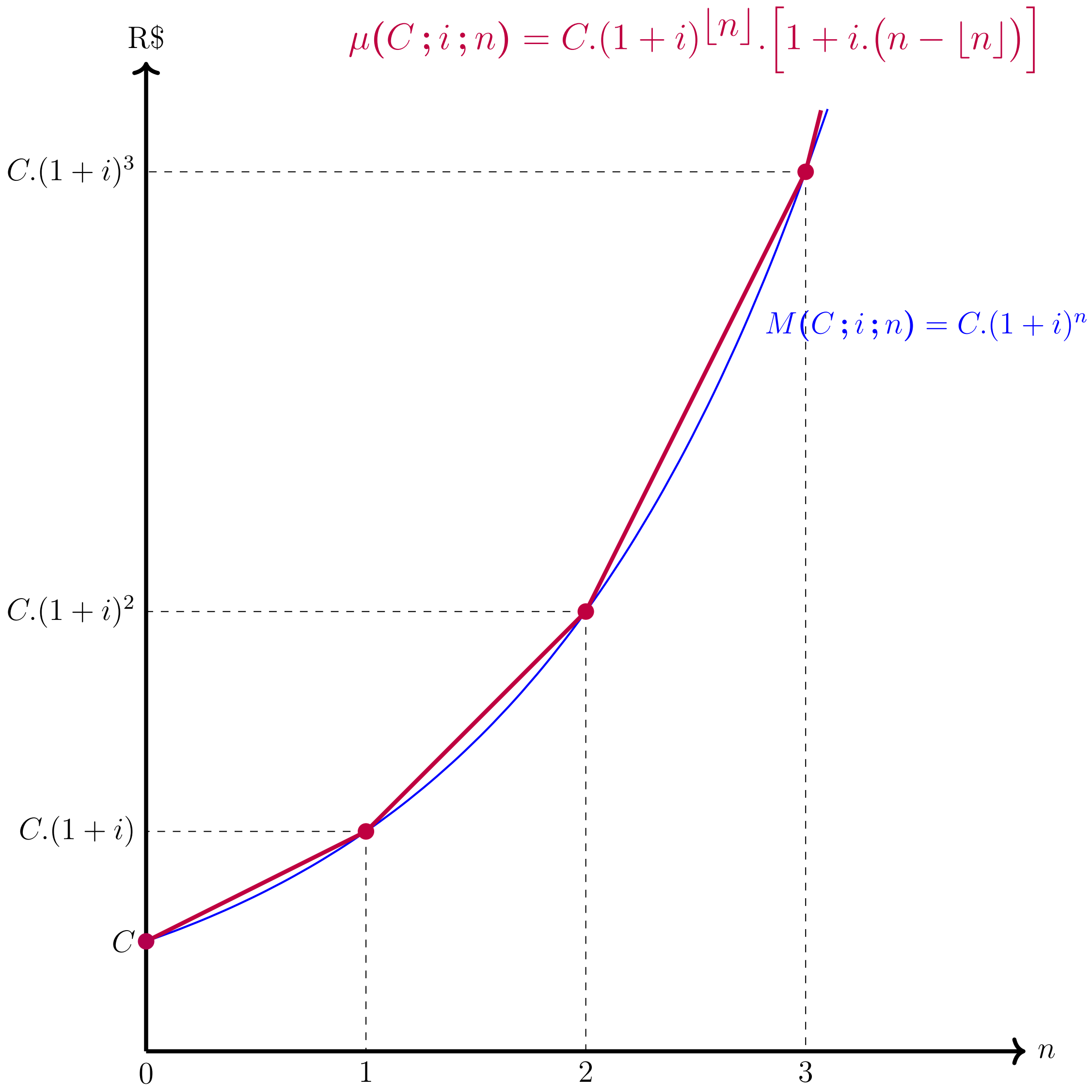
Evidenciaremos este resultado graficamente na figura 2.9. Para isto, será necessário o teorema a seguir, que é apenas uma generalização do exemplo 2.5. Neste teorema utilizaremos o conceito de "parte inteira": dado qualquer $n \in \mathbb{R}$, denotamos a parte inteira de n por $\lfloor n \rfloor$, ou seja, $\lfloor n \rfloor$ é o maior inteiro menor que ou igual a n.

Teorema T-2.3: Na capitalização mista, o capital C, à taxa de juro $i > 0$, gera o montante $\mu(C\,;\,i\,;\,n) = C.(1+i)^{\lfloor n \rfloor}.\Big[1 + i.(n - \lfloor n \rfloor)\Big]$, com $n \in \mathbb{Q}$, em períodos de i.

De **D-2.3**, **T-2.1** e **T-2.2**, temos $\mu(C\,;\,i\,;\,n) = M_s(M(C\,;\,i\,;\,\lfloor n \rfloor)\,;\,i\,;\,n - \lfloor n \rfloor)$. Daí, segue o último teorema.

A figura 2.9 mostra que os juros da capitalização composta nunca superam os da capitalização mista, quando referidos ao mesmo prazo e obtidos a partir do mesmo capital e da mesma taxa de juro.

Figura 2.9: Comparação gráfica entre as capitalizações mista e composta.



Esta representação gráfica facilita compreender a preferência pela convenção linear por parte das instituições financeiras ao cobrarem juros de mora e ao descontarem títulos de crédito - principais exceções à regra geral dos juros compostos.

No Capítulo 4, veremos que o Excel opera com a convenção exponencial, enquanto que a linearidade da capitalização mista é o modo padrão de funcionamento da HP12c.

Sobre este assunto propomos a atividade **A.2** e outras do Capítulo 5.

Capítulo 3

Sequências de Pagamentos

Uma *sequência de pagamentos* efetuados ou recebidos é um conjunto ordenado de números reais que denotam despesas ou receitas em um fluxo de caixa. Muitos autores preferem chamá-la de *série de pagamentos*, mas, na Matemática, em geral, série numérica costuma designar uma sequência específica de somas (GUIDORIZZI, 2008). Por isto, rejeitamos esta denominação.

Com base nas classificações de Assaf Neto (2012), Castelo Branco (2016), Mathias (2009) e outros, uma sequência de pagamentos pode ser *periódica* (quando os intervalos de tempo entre os pagamentos são iguais) ou *não periódica* (quando há intervalos de tempo diferentes entre pagamentos), *temporária* (quando tem número limitado de pagamentos) ou *perpétua* (quando o número de pagamentos é indefinido), *imediata* (quando o primeiro pagamento ocorre no primeiro período) ou *diferida* (quando há prazo de carência para o primeiro pagamento), *postecipada* (quando os pagamentos ocorrem no fim dos períodos - após carência, caso exista) ou *antecipada* (quando os pagamentos ocorrendo no início dos períodos - após carência, caso exista), *constante* (quando os pagamentos têm o mesmo valor nominal) ou *variável* (quando há pagamentos com valores nominais distintos). As sequências de pagamentos mais frequentes e matematicamente interessantes são periódicas. Entre elas, as prestações de um empréstimo bancário, de um financiamento imobiliário e de uma compra a prazo, as rendas de um investimento financeiro e as mensalidades e anuidades em geral.

Ressaltamos ainda que o caso típico de perpetuidade em sequências de pagamentos ocorre na locação de bens para uso contínuo (exemplo: imóvel alugado como moradia). Este caso também será abordado neste capítulo.

A maioria dessas sequências, além de periódica, é também imediata e postecipada. Por isto, este tipo será a nossa sequência de pagamentos *padrão*.

Iremos desenvolver fórmulas especiais para a sequência de pagamentos padrão e constante, a qual costuma ser denominada *sequência uniforme*.

3.1 Notações, regras, exemplos e fórmulas iniciais

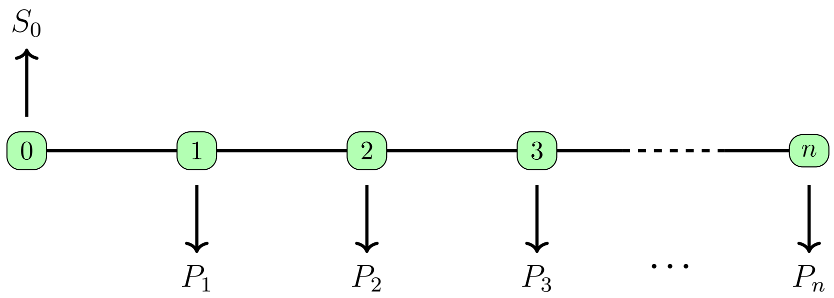
Nesta seção, veremos como denotar sequências de pagamentos e como operar genericamente com elas, inserindo-as em dois contextos genéricos: empréstimos e investimentos.

Seja a taxa de juros $i > 0$, o valor absoluto P_k de um pagamento no prazo $k \in \mathbb{N}$ (periodizado conforme i) e a sequência $\omega = (P_k) = (P_1\,;\ P_2\,;\ P_3\,;\ \ldots\,;\ P_n)$, com n pagamentos. A princípio, consideramos a sequência temporária, mas se ela for perpétua, basta fazermos k variar em todo $\mathbb{N}$.

Vimos que ω pode ser classificada de diferentes modos. Mas iremos considerar, sem perda de generalidade, apenas sequências de pagamentos padrão. Tomamos esta decisão didática porque, além de serem as mais comuns, acreditamos que a sua compreensão seja suficiente para o entendimento de outras sequências de pagamentos.

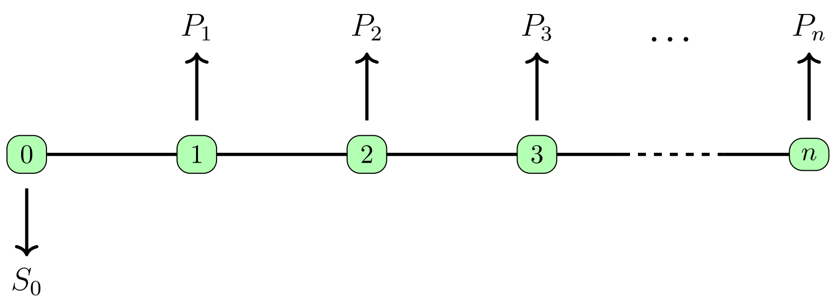
Nos empréstimos, será adotada a perspectiva do devedor. Para ele, a dívida contraída é um saldo inicial S_0, que denota uma receita. Sendo ω a sequência padrão de pagamentos que quita esta dívida, temos o diagrama de fluxo de caixa a seguir.

Figura 3.1: Fluxo de caixa de um empréstimo com sequência padrão de n pagamentos.



Nos investimentos, suporemos o ponto de vista do investidor. Assim, o dinheiro investido, que constitui o saldo inicial S_0, é uma despesa. Sendo ω a sequência padrão de rendimentos desta aplicação financeira, temos o diagrama de fluxo de caixa a seguir.

Figura 3.2: Fluxo de caixa de um investimento com sequência padrão de n pagamentos.



Seja uma operação financeira (empréstimo ou investimento) com taxa de juros i e sequência padrão $\omega = (P_k)$, com n pagamentos. Cada pagamento P_k ou toda a sequência ω tem valor presente referido ao início da operação (data focal 0) e valor futuro referido ao final dela (data focal n). Denotaremos o valor presente de P_k à taxa i por $\mathrm{VP}_{(P_k\,;\,i)}$, o valor presente de ω à taxa i por $\mathrm{VP}_{(\omega\,;\,i)}$, o valor futuro de P_k à taxa i por $\mathrm{VF}_{(P_k\,;\,i)}$ e o valor futuro de ω à taxa i por $\mathrm{VF}_{(\omega\,;\,i)}$.

Em concordância com a prática usual do mercado, adotaremos a convenção exponencial dos juros compostos (**D-2.1**) para deslocar valores monetários no tempo, assim como fizemos no estudo dos fluxos de caixa equivalentes (subseção 2.4.6). Se não houver alguma menção em contrário, esta é a regra geral.

Logo, pelo teorema **T-2.1**, temos $\mathrm{VP}_{(P_k\,;\,i)} = \frac{P_k}{(1+i)^k}$ e $\mathrm{VF}_{(P_k\,;\,i)} = P_k.(1+i)^{n-k}$. Consequentemente:

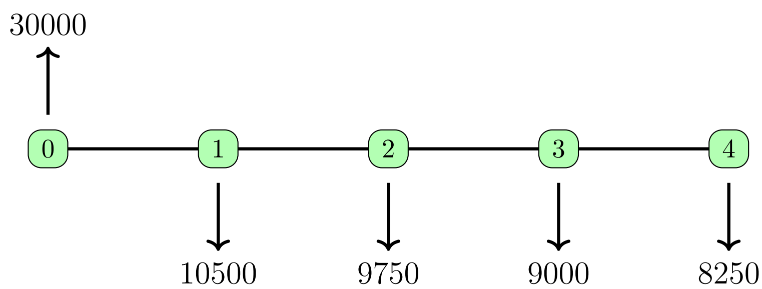
- $\mathrm{VP}_{(\omega\,;\,i)} = \frac{P_1}{(1+i)} + \frac{P_2}{(1+i)^2} + \frac{P_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P_n}{(1+i)^n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k}$ e
- $\mathrm{VF}_{(\omega\,;\,i)} = P_1.(1+i)^{n-1} + P_2.(1+i)^{n-2} + P_3.(1+i)^{n-3} + \cdots + P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k.(1+i)^{n-k}$.

Os deslocamentos monetários no tempo que produzem os resultados acima podem ser visualizados nos diagramas de fluxo de caixa que ilustramos nas figuras 3.1 e 3.2.

Se i representa o custo do empréstimo ou a rentabilidade do investimento, então $\mathrm{VP}_{(\omega\,;\,i)} = S_0$, onde S_0 é o saldo inicial da operação (valor tomado emprestado ou investido). Quando ω tem n pagamentos, $\mathrm{VF}_{(\omega\,;\,i)} = M(S_0\,;\,i\,;\,n) = S_0.(1+i)^n$.

Exemplo 3.1: Ao tomar 30000 reais emprestados, pagando em 4 anuidades de 10500, 9750, 9000 e 8250 reais, o devedor tem saldo inicial $S_0 = 30000$ (receita) e a sequência de pagamentos padrão $\alpha = (10500\,;\,9750\,;\,9000\,;\,8250)$. Mais precisamente, α é uma sequência de despesas classificada como periódica, imediata, postecipada, temporária e variável.

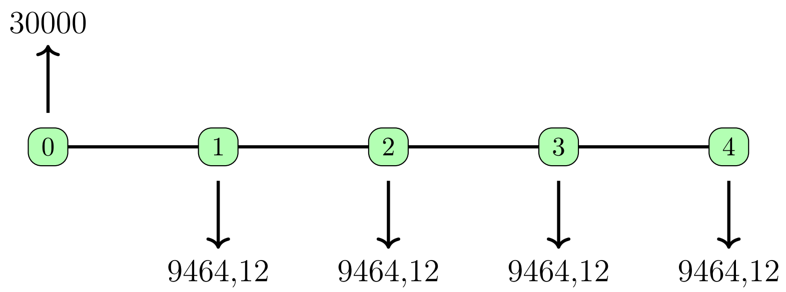
Figura 3.3: Fluxo de caixa do empréstimo de R$ 30000 pago segundo a sequência α.



Notemos que a taxa anual de juro deste empréstimo é 10% porque $\mathrm{VP}_{(\alpha\,;\,10\%)} = 10500/(1{,}1) + 9750/(1{,}1)^2 + 9000/(1{,}1)^3 + 8250/(1{,}1)^4 = 30000 = S_0$. Equivalentemente, temos $\mathrm{VF}_{(\alpha\,;\,10\%)} = 10500.(1{,}1)^3 + 9750.(1{,}1)^2 + 9000.(1{,}1) + 8250 = 43923$, que corresponde ao montante $M(30000\,;\,10\%\,;\,4) = 30000.(1{,}1)^4$.

Exemplo 3.2: Substituindo as 4 anuidades do exemplo 3.1 por R\$ 9464,12, temos a sequência de pagamentos padrão $\beta = (9464{,}12\,;\,9464{,}12\,;\,9464{,}12\,;\,9464{,}12)$. Note que β é periódica, imediata, postecipada, constante e temporária, isto é, uniforme temporária.

Figura 3.4: Fluxo de caixa do empréstimo de R\$ 30000 pago segundo a sequência β.



Como $\mathrm{VP}_{(\beta\,;\,10\%)} = 9464,12/(1{,}1) + 9464,12/(1{,}1)^2 + 9464,12/(1{,}1)^3 + 9464,12/(1{,}1)^4 \cong 30000 = S_0$, então a taxa de juro no exemplo 3.2 também é 10% ao ano.

Ademais, $\mathrm{VF}_{(\beta\,;\,10\%)} = 9464,12.(1,1)^3 + 9464,12.(1,1)^2 + 9464,12.(1,1) + 9464,12 \cong 43923 = M(30000\,;\,10\%\,;\,4)$.

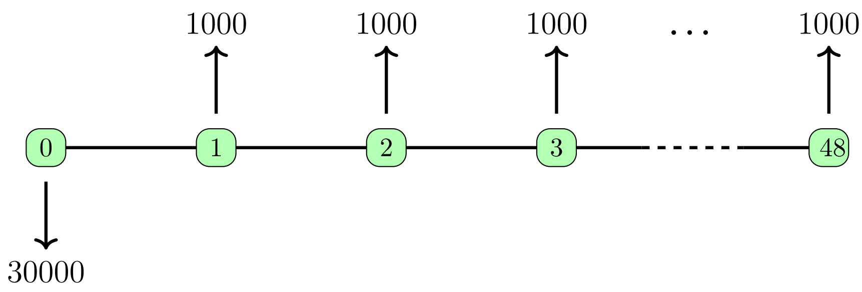
Note que $\mathrm{VP}_{(\alpha\,;\,10\%)} = \mathrm{VP}_{(\beta\,;\,10\%)}$ e que $\mathrm{VF}_{(\alpha\,;\,10\%)} = \mathrm{VF}_{(\beta\,;\,10\%)}$. Assim, pelo que vimos na subseção 2.4.6, podemos dizer que os fluxos de caixa dos exemplos 3.1 e 3.2 são equivalentes.

Exemplo 3.3: Suponha que se invista R\$ 30000 com rendimento de mil reais por mês, durante 4 anos. O investidor tem saldo inicial $S_0 = 30000$ (despesa) e rendas mensais formando a sequência padrão $\gamma = (P_1 = 1000\,;\,P_2 = 1000\,;\,P_3 = 1000\,;\,...\,;\,P_{48} = 1000)$. A sequência de receitas γ é classificada de modo análogo à sequência de despesas β.

A rentabilidade deste investimento é cerca de 2,11% ao mês, pois, com ela, temos $\mathrm{VP}_{(\gamma\,;\,2{,}11\%)} = 1000/(1{,}0211) + 1000/(1{,}0211)^2 + 1000/(1{,}0211)^3 + \ldots + 1000/(1{,}0211)^{48} = \sum\limits_{k=1}^{48} 1000/(1{,}0211)^k \overset{\text{SPG}}{=} \left[1000/(1{,}0211)\right].\left[1-(1{,}0211)^{-48}\right]/\left[1-(1{,}0211)^{-1}\right] \cong 30000 = S_0$.

Além disto, temos $\mathrm{VF}_{(\gamma\,;\,2{,}11\%)} = 1000.(1{,}0211)^{47} + 1000.(1{,}0211)^{46} + \ldots + 1000 = \sum\limits_{k=1}^{48} 1000.(1{,}0211)^{48-k} \overset{\text{SPG}}{=} 1000.\left[1-(1{,}0211)^{48}\right]/\left[1-(1{,}0211)\right] \cong 81727{,}02$ e este é o mesmo valor de $M(30000\,;\,2{,}11\%\,;\,48) = 30000.(1+2{,}11\%)^{48}$.

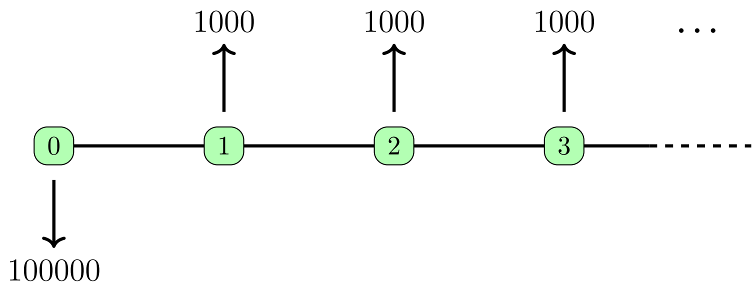
Figura 3.5: Fluxo de caixa do investimento de R$ 30000 com rendimentos em γ.



Exemplo 3.4: Investimento de R$ 30000 na reforma de um imóvel avaliado inicialmente em R$ 70000, a fim de alugá-lo por mensalidades correspondentes a 1% do seu valor. Depois de reformado, o imóvel passará a valer R$ 100000. Como 1% deste valor são R$ 1000, então esta deve ser a quantia desembolsada mensalmente pelo inquilino para pagar o aluguel.

Estamos diante de uma situação análoga à aplicação de cem mil reais em um projeto que gera rendas infinitas de mil reais por mês. Estas constituem, portanto, a sequência de pagamentos padrão $\delta = (1000;\, 1000;\, 1000;\, ...)$. Observemos que δ é periódica, imediata, postecipada, constante e perpétua, ou seja, é uniforme perpétua.

Figura 3.6: Fluxo de caixa do investimento de R$ 100000 com rendimentos em δ.



Temos $\mathrm{VP}_{(\delta\,;\,1\%)} = 1000/(1{,}01) + 1000/(1{,}01)^2 + 1000/(1{,}01)^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} 1000/(1{,}01)^k \overset{\mathrm{SPG}_\infty}{=} \big[1000/(0{,}01)\big]/\big[1-(1{,}01)^{-1}\big] = 1000/0{,}01 = 100000$. Logo, a rentabilidade do investimento é 1% ao mês.

Observemos que não é possível verificar esta rentabilidade pelo valor futuro de δ porque ele é, evidentemente, atingível, ou seja, $\mathrm{VF}_{(\delta\,;\,1\%)}$ tende ao infinito.

A partir do que foi visto até aqui, iremos generalizar regras para sequências *uniformes* de pagamentos, ou seja, para sequências *periódicas*, *imediatas*, *postecipadas* e *constantes*.

Teorema T-3.1: Sejam a taxa de juros i e a sequência uniforme de n pagamentos $\omega = (P_k)$ com $P_k = P$ para todo $k \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$, em períodos de i, cujo valor presente (na data 0) é $\mathrm{VP}_{(\omega\,;\,i)}$ e cujo valor futuro (na data n) é $\mathrm{VF}_{(\omega\,;\,i)}$. Temos:

$$\mathrm{VP}_{(\omega\,;\,i)} = P.\left[1-(1+i)^{-n}\right]\Big/ i \qquad \text{e} \qquad \mathrm{VF}_{(\omega\,;\,i)} = P.\left[(1+i)^{n}-1\right]\Big/ i.$$

Este teorema resulta imediatamente da aplicação da fórmula SPG nas expressões que definem valor presente e valor futuro de uma sequência de pagamentos padrão (p.55), após substituirmos P_k por P: $\mathrm{VP}_{(\omega\,;\,i)} = \sum_{k=1}^{n} P/(1+i)^k$ e $\mathrm{VF}_{(\omega\,;\,i)} = \sum_{k=1}^{n} P.(1+i)^{n-k}$.

Se a sequência uniforme acima for perpétua em vez de temporária, isto é, considerando $\omega' = (P\,;\,P\,;\,P\,;\,...)$ e a mesma taxa de juros i, temos $\mathrm{VP}_{(\omega'\,;\,i)} = \sum_{k=1}^{+\infty} P/(1+i)^k \overset{\mathrm{SPG}_\infty}{=} \frac{P/(1+i)}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{P}{i}$. Neste caso, não faz sentido falar de valor futuro (vide exemplo 3.6).

Abordamos até aqui algumas situações que serão retomadas nas seções 3.2 (onde analisaremos a viabilidade de investimentos e empréstimos) e 3.3 (onde abordaremos sistemas de amortização). Empregamos fórmulas como SPG e SPG_∞, citadas na seção 2.1 do Capítulo 2, e continuaremos utilizando progressões e outros pré-requisitos para obter resultados de modo aritmético e algébrico. No Capítulo 4, veremos como obtê-los com o auxílio da HP12c e do Excel.

3.2 Viabilidade de uma operação financeira

De modo geral, uma operação financeira é dita viável se for lucrativa ou minimamente prejudicial. Analisaremos esta viabilidade no contexto das sequências de pagamentos, considerando duas operações financeiras básicas: investimentos e empréstimos.

Segundo Puccini (2017), "para que um investidor possa tomar a decisão de aceitar ou rejeitar determinado investimento, é indispensável que ele tenha um elemento de comparação à disposição". Este parâmetro é uma taxa, que também deve ser considerada no momento de consentir ou não em realizar um empréstimo.

Estamos falando da "taxa de juros que representa o valor do dinheiro para cada pessoa e que é, em suma, a taxa à qual a pessoa consegue fazer render seu capital" (MORGADO, 2005). Iremos denotar esta taxa por TMA, que significa: *taxa mínima de atratividade* para quem investe dinheiro e *taxa máxima de atratividade* para quem toma dinheiro emprestado.

A TMA é um referencial, uma taxa limítrofe. Ela deve ser superada pela rentabilidade do investimento e deve superar o custo do empréstimo, a fim de que tais operações sejam viáveis.

Assim, apesar da subjetividade pertinente ao risco que cada investidor ou devedor está disposto a correr e outros fatores difíceis de ser quantificados, é possível avaliar a viabilidade de um investimento ou empréstimo objetivamente, com auxílio da MF. Isto pode ocorrer a partir da análise de valores monetários, taxas e prazos. As duas primeiras serão trabalhadas a seguir, por meio do VPL e da TIR. Retomaremos a terceira análise na seção 3.4, como complemento ao estudo dos investimentos financeiros.

3.2.1 Valor Presente Líquido e Taxa Interna de Retorno

Já vimos que o *custo* de um empréstimo ou a *rentabilidade* de um investimento é dado por uma taxa. A partir daqui, a denominaremos de *Taxa Interna de Retorno* (TIR) ou Internal Rate of Return (IRR). Ela pode ser definida como "taxa de juros (desconto) que iguala, em determinado momento do tempo, o valor presente das entradas (recebimentos) com o das saídas (pagamentos) previstas de caixa" (ASSAF NETO, 2012).

O mesmo autor define *Valor Presente Líquido* (VPL) ou Net Present Value (NPV) como método para analisar fluxos de caixa que é "obtido pela diferença entre o valor presente dos benefícios (ou pagamentos) previstos de caixa, e o valor presente do fluxo de caixa inicial (valor do investimento, do empréstimo ou do financiamento)".

Puccini (2017) estabelece primeiro que o VPL de um fluxo de caixa é igual ao valor presente de suas parcelas futuras (que são descontadas com uma determinada taxa), somado algebricamente com a grandeza colocada no ponto zero. Em seguida, ele define que a TIR de um fluxo de caixa é a taxa de desconto que faz seu VPL ser igual a zero. A taxa de desconto utilizada para calcular o VPL é a TMA - taxa mínima ou máxima de atratividade do investimento ou do empréstimo. Esta taxa também serve de base comparativa para a análise da TIR, conforme mencionamos anteriormente e iremos detalhar adiante.

Por enquanto, adotaremos as siglas VPL e TIR, mas NPV e IRR reaparecerão no Capítulo 4, ao explorarmos o uso da HP12c.

A partir das definições anteriores, definiremos algebricamente a TIR e o VPL para um fluxo de caixa básico associado a uma sequência padrão de pagamentos.

Definição D-3.1: Seja um investimento (ou um empréstimo) com fluxo de caixa constituído por uma única despesa (ou uma única receita) S_0 e por uma sequência padrão $\omega = (P_k)$ de n pagamentos recebidos (ou efetuados). Se o dinheiro vale TMA, temos:

$$VPL = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1 + TMA)^k} - S_0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1 + TIR)^k} - S_0 = 0.$$

Notemos que o valor presente da sequência padrão de pagamentos (P_k) calculado pela TIR resulta no saldo inicial, isto é, $\text{VP}_{(\omega\,;\,TIR)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+TIR)^k} = S_0$. Mas, quando o valor presente de (P_k) é calculado pela TMA resulta na soma do VPL com o saldo inicial, isto é, $\text{VP}_{(\omega\,;\,TMA)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+TMA)^k} = VPL + S_0$.

Vejamos agora como analisar a viabilidade de uma operação financeira pela TIR e pelo VPL:

- Um investimento com saldo inicial S_0, taxa mínima de atratividade TMA_{inv}, rentabilidade TIR_{inv} e valor presente líquido VPL_{inv} será dito viável se, e só se:

  $TIR_{\text{inv}} > TMA_{\text{inv}}$ e $VPL_{\text{inv}} > 0$.

- Um empréstimo com saldo inicial S_0, taxa máxima de atratividade TMA_{emp}, custo TIR_{emp} e valor presente líquido VPL_{emp} será dito viável se, e só se:

  $TIR_{\text{emp}} < TMA_{\text{emp}}$ e $VPL_{\text{emp}} < 0$.

Obviamente, $TIR_{\text{inv}} > TMA_{\text{inv}}$ significa que a rentabilidade do investimento supera o mínimo esperado. Assim como $TIR_{\text{emp}} < TMA_{\text{emp}}$ significa que o custo do empréstimo é inferior ao máximo aceitável.

Ademais, $VPL_{\text{inv}} > 0 \iff \text{VP}_{(\omega\,;\,TMA)} > S_0$ e $VPL_{\text{emp}} < 0 \iff \text{VP}_{(\omega\,;\,TMA)} < S_0$. A viabilidade do investimento está, de fato, condicionada a rendimentos (receitas) com valor presente maior que o valor investido (despesa). Assim como, o empréstimo só é viável se os pagamentos (despesas) constituírem valor presente inferior ao que foi tomado emprestado (receita). Esta análise ficará mais clara por meio de exemplos.

Na seção 3.1, vimos empréstimos custando 10% ao ano. Esta é a TIR usada nas sequências α e β, que chamaremos de TIR_{emp}. Vimos também um investimento rendendo 2,11% ao mês. Esta é a TIR usada na sequência γ, que chamaremos de TIR_{inv}.

Exemplo 3.5: Consideremos que o empréstimo de R\$ 30000,00 à 10% ao ano, pago em 4 anuidades de R\$ 9464,12 (sequência β), tenha sido aplicado num investimento com rentabilidade de 2,11% ao mês e 48 rendimentos mensais de R\$ 1000,00 (sequência γ).

Observemos que o custo do empréstimo é a taxa mínima de atratividade do investimento, ou seja, $TIR_{\text{emp}} = 10\%$ ao ano $= TMA_{\text{inv}}$. Assim como a rentabilidade do investimento é a taxa máxima de atratividade do empréstimo, ou seja, $TIR_{\text{inv}} = 2{,}11\%$ ao mês $= TMA_{\text{emp}}$.

Analisemos, primeiro sob o ponto de vista do investidor.

Do conceito de taxas equivalentes, sabemos que 10% ao ano equivale à taxa mensal $(1 + 10\%)^{1/12} - 1 \cong 0{,}008 = 0{,}8\%$. Como $2{,}11\% > 0{,}8\%$ então a rentabilidade do investimento supera o seu custo, isto é, $TIR_{\text{inv}} > TMA_{\text{inv}}$. Logo, o investimento é viável.

Além disto, $\mathrm{VP}_{(\gamma\,;\,0{,}008)} = \sum_{k=1}^{48} 1000/(1{,}008)^k$, donde, pela fórmula SPG ou imediatamente pelo **T-3.1**, obtemos $\mathrm{VP}_{(\gamma\,;\,0{,}008)} = 1000.\big[1-(1{,}008)^{-48}\big]/(0{,}008) \cong 39728{,}39$. O fato de este valor superar $S_0 = 30000$ corrobora a viabilidade do investimento.

Analogamente, constata-se esta viabilidade pelo $VPL_{\text{inv}} = \mathrm{VP}_{(\gamma\,;\,0{,}008)} - S_0 \cong 39728{,}39 - 30000 = 9728{,}39 > 0$.

Analisemos agora a mesma situação na perspectiva do tomador do empréstimo.

Como $TMA_{\text{emp}} = 2{,}11\%$ ao mês equivale à taxa anual $(1+2{,}11\%)^{12} - 1 \cong 0{,}2848 = 28{,}48\%$, então $TIR_{\text{emp}} < TMA_{\text{emp}}$. Logo, o empréstimo é viável.

Também temos $\mathrm{VP}_{(\beta\,;\,0{,}2848)} = \sum_{k=1}^{4} (9464{,}12)/(1{,}2848)^k$. Pelo **T-3.1**, $\mathrm{VP}_{(\beta\,;\,0{,}2848)} = (9464{,}12).\big[1-(1{,}2848)^{-4}\big]/(0{,}2848) \cong 21035{,}30$. Este valor inferior a $S_0 = 30000$ ratifica a viabilidade do empréstimo, que verificamos antes pela TIR_{emp}.

De modo análogo, constatamos esta viabilidade a partir da negatividade do VPL do empréstimo: $VPL_{\text{emp}} = \mathrm{VP}_{(\beta\,;\,0{,}2848)} - S_0 = 21035{,}30 - 30000 = -8964{,}70 < 0$.

Reparemos que o cálculo do VPL é direto. Quando a sequência de pagamentos é padrão e constante, podemos ainda utilizar a fórmula SPG ou o **T-3.1**, que resulta dela.

Entretanto, a TIR não é uma variável isolada na equação que a define (**D-3.1**) e, em geral, não é fácil isolá-la. Daí a importância de recursos tecnológicos, como a HP12c e o Excel, que dispõem de funções financeiras para calcular a TIR. Isto será feito no Capítulo 4, onde também utilizaremos estas tecnologias para calcular o VPL.

Nos exemplos anteriores, apenas verificamos que TIR_{inv} e TIR_{emp} são válidas, mas não mostramos como obtê-las a partir do saldo inicial S_0 e dos pagamentos P_k. Vejamos como é possível proceder, se não dispusermos de um recurso como a HP12c ou o Excel.

Por **D-3.1**, temos $\sum_{k=1}^{n} P_k/(1+TIR)^k - S_0 = 0$. A TIR corresponde a uma das n raízes desta equação de grau n, que podem ser valores positivos, negativos ou imaginários, mas as únicas raízes com sentido econômico são as positivas. Como estamos considerando valores absolutos para S_0 e P_k, então há apenas uma variação de sinal nos coeficientes da equação. Logo, de acordo com a *regra de sinais de Descartes*, mencionada na introdução deste trabalho (subseção 1.1.3), a referida equação admite uma só raiz maior que zero.

No empréstimo de 30000 pago em 4 anuidades de 9464,12, temos a seguinte equação: $\sum_{k=1}^{4} 9464{,}12/(1+TIR_{\text{emp}})^k - 30000 = 0$ (eq.1). No investimento de 30000 com 48 rendimentos mensais de 1000, equacionamos: $\sum_{k=1}^{48} 1000/(1+TIR_{\text{inv}})^k - 30000 = 0$ (eq.2).

Por **T-3.1**, reescrevemos $9464,12.\big[1-(1+TIR_{\text{emp}})^{-4}\big]/TIR_{\text{emp}} = 30000$ (eq.1) e $1000.\big[1-(1+TIR_{\text{inv}})^{-48}\big]/TIR_{\text{inv}} = 30000$ (eq.2). Daí, $\big[1-(1+TIR_{\text{emp}})^{-4}\big]/TIR_{\text{emp}} \cong 3{,}17$ (eq.1) e $\big[1-(1+TIR_{\text{inv}})^{-48}\big]/TIR_{\text{inv}} = 30$ (eq.2).

As incónitas não foram isoladas nas últimas equações e não iremos tentar isolá-las. Mas utilizaremos estes formatos simplificados para obter o custo do empréstimo e a rentabilidade do investimento por métodos numéricos. Tais métodos consistem basicamente em testar valores para TIR_{emp} e para TIR_{inv}.

Tomemos $f(i) = \left[1-(1+i)^{-4}\right]/i$ e $g(i) = \left[1-(1+i)^{-48}\right]/i$ para facilitar a notação e testemos valores para i com o objetivo de encontrar $f(i) = 3{,}17$ e $g(i) = 30$. Podemos começar verificando que $f(1\%) \cong 3{,}9 > 3{,}17$, $f(50\%) \cong 1{,}6 < 3{,}17$, $g(1\%) \cong 37{,}8 > 30$ e $g(50\%) \cong 2 < 30$. Daí, temos que TIR_{emp} e TIR_{inv} estão entre 1% e 50%. Mais que isto, notamos que TIR_{emp} e TIR_{inv} estão bem mais próximas de 1% do que de 50%. Por isto, testaremos logo 10%. De $f(10\%) \cong 3{,}17$ já concluímos que $TIR_{\text{emp}} = 10\%$ ao ano. De $g(10\%) \cong 9{,}9 < 30$, temos $1\% < TIR_{\text{inv}} < 10\%$. Testando $g(2\%) \cong 30{,}7 > 30$ e $g(3\%) \cong 25{,}3 < 30$, obtemos $2\% < TIR_{\text{inv}} < 3\%$. Assim continuaríamos até chegarmos em $TIR_{\text{inv}} \cong 2{,}11\%$.

A *regra de sinais de Descartes* garante que estas taxas são as únicas reais positivas.

Além das análises realizadas até aqui, o VPL e a TIR são muito úteis para comparar duas ou mais operações financeiras do mesmo tipo, a fim de identificar a mais vantajosa (ou a menos danosa). Se dois investimentos possuem a mesma duração e o mesmo saldo inicial, a análise é imediata: o investimento com maiores VPL e TIR é o mais lucrativo. Analogamente, se dois empréstimos de mesmo valor durarem o mesmo tempo, o empréstimo mais atrativo é o que tiver menores VPL e TIR.

Porém, se uma das operações durar mais tempo ou tiver maior saldo inicial que a outra, algumas adaptações poderão ser necessárias. Na verdade, a TIR, pela sua natureza relativa, independe destes fatores, mas o VPL depende.

Por exemplo, dados um projeto X de 8 anos e um projeto Y de 10, se eles puderem, hipoteticamente, ser repetidos sucessivamente nas mesmas condições, então poderemos igualar as suas durações e eliminar o problema. Neste caso, bastaria repetir 5 vezes o projeto X e 4 vezes o projeto Y, de modo que ambos passem a durar 40 anos.

Outra situação é aquela em que os projetos têm saldos iniciais distintos. Nesta análise, podemos aproveitar os VPLs já calculados para obter uma taxa de rendimento i dividindo cada VPL pelo saldo inicial do respectivo projeto. Obviamente, o projeto mais rentável terá o maior valor para i.

Ressaltamos que o VPL e a TIR pressupõem que os fluxos intermediários de caixa da alternativa sejam reinvestidos à taxa de desconto utilizada (ASSAF NETO, 2012).

Proporemos uma aplicação introdutória dos conceitos de TIR e VPL em **A.1** do Capítulo 5 (vide a 4ª solução e as observações finais). Outras atividades do mesmo capítulo tratam da TIR e do VPL, mas, neste contexto, recomendamos especialmente **A.5**.

3.3 Sistemas de Amortização

Raramente conseguimos economizar elevadas quantias de dinheiro em tempo hábil para custear algo que precisamos com urgência, como um tratamento de saúde, uma casa para morar, um objeto utilizado como fonte de renda, uma faculdade, mas também uma geladeira, um fogão, um veículo e outros bens. Por isto, aderimos a parcelamentos com juros. Para evitarmos a inadimplência, devemos entender como eles funcionam. Neste contexto, analisaremos os sistemas de amortização mais praticados no Brasil.

O dicionário mais famoso da língua portuguesa diz que amortizar é "extinguir (dívida) aos poucos" ou "abater parte de uma dívida" (FERREIRA, 2010). Para Dante (2020), "amortizar uma dívida significa pagar o saldo devedor ou ao menos parte dele".

De acordo com Morgado (2005), quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade: uma parte quita os juros e a outra amortiza a dívida. Por exemplo, "ao pagar um empréstimo de R\$ 1000 (o principal) em 10 parcelas de R\$ 120, em cada parcela, R\$ 100 são para a amortização, e os R\$ 20 restantes vão para o pagamento de juros e encargos" (BCB, 2013).

Segundo Assaf Neto (2012), "os sistemas de amortização são desenvolvidos basicamente para empréstimos e financiamentos de longo prazo, envolvendo desembolsos periódicos", e tratam "da forma pela qual o principal e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital". Para Mathias (2009), são "modalidades de restituição do principal e juros" nestas operações que, em geral, "têm condições previamente estipuladas por contratos entre as partes, ou seja, entre o credor e o devedor". Bonjorno (2020) complementa que "as diferentes maneiras de se realizar esse cálculo caracterizam o que chamamos de sistema de amortização".

Neste ensejo, ressaltamos uma observação de Castelo Branco (2018) que distingue empréstimo de financiamento: o primeiro "não necessita ser justificado quanto à sua finalidade" (exemplos: cheque especial e Crédito Direto ao Consumidor), mas o segundo sim (exemplos: compra de um automóvel, imóvel e crediário). Logo, financiamento é apenas um tipo de empréstimo que precisa ter um propósito pré-estabelecido.

Além disto, "nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor" (MATHIAS, 2009). Assim, será considerado o regime de juros compostos, pois, nesta forma de cálculo, se os juros de um período não forem pagos, passarão a compor o próximo saldo devedor. Logo, toda esta seção está fundamentada na definição **D-2.1** e no teorema **T-2.1**.

Os valores das amortizações, dos juros, dos pagamentos e dos saldos dependem do sistema adotado, mas existem algumas generalidades estruturais, que serão estabelecidas a seguir.

Definição D-3.2: Seja uma dívida com valor S_0 (saldo inicial), à taxa de juros i, quitada pela sequência padrão $\omega = (P_k)$ de n pagamentos periodizados conforme i. Consideremos ainda que S_k, A_k, J_k e P_k são os respectivos valores absolutos do saldo, da amortização, do juro e do pagamento, no prazo $k \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ (em períodos de i), e que A_0, J_0 e P_0 representem, nesta ordem, a amortização, o juro e o pagamento na data zero. Definimos:

(1) $A_0 = J_0 = P_0 = 0$;

(2) $P_k = A_k + J_k$;

(3) $S_k = S_{k-1} - A_k$;

(4) $J_k = i.S_{k-1}$;

(5) $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k = S_0 = \text{VP}_{(\omega\,,\,i)}$.

A fim de facilitar a compreensão deste assunto, consideramos que todo pagamento seja formado por duas parcelas: a amortização e o juro. Porém, na realidade, elas são apenas os principais constituintes da prestação, que pode ter na sua composição seguros, tarifas administrativas, impostos e outros encargos, que embutimos na taxa de juro.

Nos deparamos anteriormente com um exemplo de cada um dos dois sistemas de amortização mais comuns no Brasil. Isto ocorreu na quitação de 30000 reais pelas sequências $\alpha = (10500\,;\,9750\,;\,9000\,;\,8250)$ e $\beta = (9464{,}12\,;\,9464{,}12\,;\,9464{,}12\,;\,9464{,}12)$, cada uma com 4 pagamentos anuais à taxa de 10% ao ano.

Sejam S_k, A_k, J_k e P_k o saldo, a amortização, o juro e o pagamento do k-ésimo ano, segundo α, e sejam S'_k, A'_k, J'_k e P'_k o saldo, a amortização, o juro e o pagamento do k-ésimo ano, segundo β. Devido à taxa anual de 10%, no primeiro ano, temos $J_1 = J'_1 = (10\%).30000 = 3000$. Daí, $A_1 = 10500 - 3000 = 7500$ e $A'_1 = 9464{,}12 - 3000 = 6464{,}12$, donde $S_1 = 30000 - 7500 = 22500$ e $S'_1 = 30000 - 6464{,}12 = 23535{,}88$. No segundo ano, temos $J_2 = (10\%).22500 = 2250$ e $J'_2 = (10\%).23535{,}88 \cong 2353{,}59$, donde $A_2 = 9750 - 2250 = 7500$ e $A'_2 = 9464{,}12 - 2353{,}59 = 7110{,}53$, consequentemente, $S_2 = 22500 - 7500 = 15000$ e $S'_2 = 23535{,}88 - 7110{,}53 = 16425{,}35$. Assim sucessivamente.

Dificilmente alguém não se perderia nas contas acima. Por isto, elas costumam ser organizadas em tabelas. Assim será feito nas próximas subseções deste capítulo, quando retomarmos as sequências α e β, identificando cada uma com um sistema de amortização.

Outrossim, como outrora mencionado, os diagramas de fluxos de caixa não mostram informações importantes. Em particular, eles omitem as amortizações, os juros e os saldos. Basta observar as figuras 3.3 e 3.4 associadas aos últimos exemplos. As tabelas que construiremos por recorrência nesta seção suprirão tais deficiências.

Nossas tabelas de amortizações terão sempre cinco colunas e $n+1$ linhas para os valores do período zero ao n, conforme a ilustração abaixo.

Figura 3.7: Tabela de um sistema de amortizações genérico

k	S_k	A_k	J_k	P_k
0	S_0	0	0	0
1	$S_1 = S_0 - A_1$	A_1	$J_1 = i.S_0$	$P_1 = A_1 + J_1$
2	$S_2 = S_1 - A_2$	A_2	$J_2 = i.S_1$	$P_2 = A_2 + J_2$
3	$S_3 = S_2 - A_3$	A_3	$J_3 = i.S_2$	$P_3 = A_3 + J_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$S_n = 0$	A_n	$J_n = i.S_{n-1}$	$P_n = A_n + J_n$

Note que $S_n = 0$ porque a dívida deve ser quitada no fim do prazo. Além disto, obviamente, a sequência (S_k) é decrescente. Logo, (J_k) também é.

O modo como se comportam as amortizações e os pagamentos é o que distingue um sistema do outro. Os mais comuns são o SAC e o SFA, que abordaremos em 3.3.1 e 3.3.2.

3.3.1 SAC

O SAC ou Sistema de Amortizações Constantes caracteriza-se, obviamente, por amortizações fixas e, consequentemente, por pagamentos com valores absolutos linearmente decrescentes. O mesmo ocorre com seus saldos e juros. Provaremos estas características secundárias após observá-las em um exemplo. O SAC ficou famoso por ser muito utilizado em financiamentos de longo prazo, como os imobiliários (PUCCINI, 2017).

Exemplo 3.6: Sejam 30000 reais financiados no SAC, em 4 prestações anuais, à taxa de 10% ao ano. O saldo inicial é $S_0 = 30000$ e as amortizações são A_1, A_2, A_3 e A_4 tais que $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 30000$ com $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$. Daí, $A = 30000/4 = 7500$. Assim, para cada ano $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, temos saldo $S_k = S_{k-1} - 7500$, juros $J_k = (0{,}1).S_{k-1}$ e pagamento $P_k = 7500 + J_k$. Estes resultados estão na tabela da figura 3.8.

Figura 3.8: Exemplo de Tabela SAC .

k	S_k	A_k	J_k	P_k
0	30000	0	0	0
1	22500	7500	3000	10500
2	15000	7500	2250	9750
3	7500	7500	1500	9000
4	0	7500	750	8250

Notemos que este é o mesmo exemplo 3.1 e que a coluna mais à direita da tabela forma a sequência α. Conforme havíamos dito, a representação tabular evidencia muito mais informações do que o diagrama deste fluxo de caixa (figura 3.3).

Na figura 3.8, é fácil perceber que os saldos, os juros e os pagamentos formam PAs decrescentes, ou seja, decrescem de modo linear. Isto será generalizado a seguir.

Teorema T-3.2: Seja S_0 o saldo inicial de uma dívida contraída no SAC, à taxa de juro i, sendo quitada por n pagamentos periodizados por i. Pela definição **D-3.2** e pelo conceito de SAC, para cada $k \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ (em períodos da taxa i), temos:

(a) a amortização $A_k = A = \frac{S_0}{n}$, pois $S_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} A = n.A$,

(b) o saldo $S_k = S_0 - \sum\limits_{j=1}^{k} A_j \overset{\text{(a)}}{=} S_0 - k.A$,

(c) o juro $J_k = i.S_{k-1} \overset{\text{(b)}}{=} i.[S_0 - (k-1).A]$,

(d) o pagamento $P_k = A + J_k \overset{\text{(c)}}{=} A + i.[S_0 - (k-1).A]$.

Afirmamos no primeiro parágrafo desta subseção que a constância das amortizações no SAC acarreta decrescimentos lineares dos saldos, juros e pagamentos, ou seja, faz com que as sequências (S_k), (J_k) e (P_k) sejam PAs decrescentes. Isto foi observado no último exemplo (figura 3.8) e será comprovado a seguir.

Podemos reescrever (b): $S_k = (S_0 - A) + (k-1).(-A)$, (c): $J_k = (i.S_0) + (k-1).(-i.A)$ e (d): $P_k = (A + i.S_0) + (k-1).(-i.A)$. Por TPA, temos que (S_k) é PA com primeiro termo $S_1 = S_0 - A$ e razão $-A$, que (J_k) é PA com primeiro termo $J_1 = i.S_0$ e razão $-i.A$ e que (P_k) é PA com primeiro $P_1 = A + i.S_0$ e razão $-i.A$. Como a taxa de juros é positiva em qualquer sistema de amortizações, estas progressões são, de fato, decrescentes.

Observemos ainda que, em (b), (c) e (d), S_k, J_k e P_k estão em função do índice k, pois S_0, n, i e A são constantes. Isto permite obter diretamente um saldo, um juro e um pagamento em certo prazo k, sem fazer uso de recorrência. Percebamos a utilidade destas fórmulas se as 4 anuidades do exemplo 3.6 forem distribuídas em 48 mensalidades.

3.3.2 SFA

O SFA ou Sistema Francês de Amortizações é um dos sistemas de amortizações mais usados pelas instituições financeiras e pelo comércio. Este sistema surgiu na França do século XVIII, mas foi criado pelo inglês Richard Price (1723-1791). Por isto, também costuma ser chamado de Sistema Price. Entretanto, este é um caso particular daquele.

A diferença é que, no Sistema Price, a taxa de juros é nominal e a periodicidade dos pagamentos é inferior ao período desta taxa (CASTELO BRANCO, 2018).

O SFA é caracterizado por pagamentos constantes. Além disto, seus saldos, amortizações e juros não variam de modo linear como no SAC. Em particular, as amortizações crescem exponencialmente. Veremos isto a seguir.

Exemplo 3.7: Reconsideremos o exemplo 3.6 no SFA, isto é, temos saldo inicial $S_0 = 30000$, taxa de juro $i = 10\%$ ao ano e $n = 4$ pagamentos anuais iguais a P.

Pelo item (5) de **D-3.2**, temos $30000 = \sum_{k=1}^{4} P/(1{,}1)^k \overset{\text{SPG}}{=} P.\big[1-(1{,}1)^{-4}\big]/(0{,}1)$, donde $P = 30000.(0{,}1)/\big[1-(1{,}1)^{-4}\big] \cong 9464{,}12$ (sequência β). Esta aproximação exigirá acréscimos no final. No Capítulo 4, eliminaremos este erro (figura 4.6).

Para cada ano $k \in \{1;2;3;4\}$, o juro é $J_k = (0{,}1).S_{k-1}$, a amortização é $A_k = 9464{,}12 + J_k$ e o saldo é $S_k = S_{k-1} - A_k$. Os resultados assim obtidos estão na figura 3.9.

Figura 3.9: Exemplo de tabela SFA.

k	S_k	A_k	J_k	P_k
0	30000,00	0	0	0
1	23535,88	6464,12	3000,00	9464,12
2	16425,35	7110,53	2353,59	9464,12
3	8603,76	7821,58	1642,54	9464,12
4	0,02	8603,74	860,38	9464,12

Conforme previmos, faltaram 2 centavos para quitar a dívida. Acrescentando-os em A_4 e, consequentemente, em P_4, a última linha da tabela anterior fica da seguinte forma:

4	0,00	8603,76	860,38	9464,14

Neste exemplo, as amortizações variam exponencialmente, pois formam uma PG de razão (1,1). Isto será generalizado adiante. Quanto aos juros e aos saldos, basta subtrair e dividir termos consecutivos para verificar que (J_k) e (S_k) não são PA nem PG.

Como no exemplo anterior, este também deixa claro que a forma tabular evidencia muito mais detalhes de uma movimentação financeira do que um diagrama de fluxo de caixa. Comparemos, neste caso, as figuras 3.9 e 3.4.

Ressaltamos ainda que, se a taxa 0,1 ao ano fosse nominal com capitalização mensal, teríamos um sistema Price com taxa efetiva de juro igual a (0,1)/12 ao mês e 48 mensalidades de R$ 760,88, isto é, $P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = P_{48} = P \cong 760{,}88$. Com efeito, $\sum_{k=1}^{48} 760{,}88/\big[1+(0{,}1)/12\big]^k \overset{\text{SPG}}{=} 760{,}88.\Big\{1-\big[1+(0{,}1)/12\big]^{-48}\Big\} \div \big[(0{,}1)/12\big] \cong 30000.$

A tabela Price é construída de modo análogo ao que fizemos no exemplo 3.7. Sua construção manual é trabalhosa, mas não no Excel. Faremos isto na atividade **A.3** do Capítulo 5, na qual também iremos retomar os exemplos 3.6 e 3.7.

Pelo que vimos na subseção 2.4.3 (Capítulo 2), a taxa mensal $(0{,}1)/12$ equivale à taxa anual $\big[1 + (0{,}1)/12\big]^{12} - 1 \cong 0{,}1047$. Daí, concluímos que, neste caso, os juros são maiores que naquele, onde 0,1 ao ano era uma taxa efetiva.

Teorema T-3.3: Consideremos o saldo inicial S_0 denotando uma dívida contraída no SFA, à taxa de juros i, com quitação em n pagamentos ao período de i. A partir de **D-3.2** e da definição de SFA, para cada prazo $k \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ periodizado segundo i, obtemos:

(a) o pagamento $P_k = P = \frac{i.S_0}{1-(1+i)^{-n}}$,

(b) saldo $S_k = \frac{S_0}{1-(1+i)^{-n}}.\big[1 - (1+i)^{k-n}\big]$,

(c) juro $J_k = i.S_{k-1} \overset{\text{(b)}}{=} i.\frac{S_0}{1-(1+i)^{-n}}.\big[1 - (1+i)^{k-1-n}\big]$,

(d) amortização $A_k = P - J_k \overset{\text{(a),(c)}}{=} \frac{i.S_0}{(1+i)^n-1}.(1+i)^{k-1}$.

Os procedimentos para provar (a) são análogos aos do exemplo 3.7. Primeiro deslocamos todos os pagamentos para o início, obtendo assim o seu valor presente que, por definição, é igual ao saldo inicial: $S_0 = \sum_{k=1}^{n} P/(1+i)^k \overset{\text{SPG}}{=} P.\big[1 - (1+i)^{-n}\big]/i$. Depois, basta isolar P.

A demonstração de (b) é similar, pois a dívida S_k será quitada por $(n-k)$ pagamentos sucessivos e postecipados que, deslocados para k e adicionados, resultam no saldo devedor: $S_k = P_{k+1}/(1+i)^1 + P_{k+2}/(1+i)^2 + P_{k+3}/(1+i)^3 + \cdots + P_n/(1+i)^{n-k} = \sum\limits_{j=1}^{n-k} P/(1+i)^j$. Daí, por SPG, obtemos $S_k = P.\big[1-(1+i)^{-n+k}\big]/i$. Substituindo (a) nesta equação, segue o item (b).

Note que, de (b), tem-se $S_{k-1} = \Big\{S_0/\big[1 - (1+i)^{-n}\big]\Big\}.\big[1 - (1+i)^{(k-1)-n}\big]$. Daí, obtemos (c).

Para obtermos (d), basta substituirmos (a) e (c) em $A_k = P - J_k$ e realizarmos algumas manipulações algébricas. Provemos agora a afirmação feita no segundo parágrafo desta subseção. Primeiramente, observemos que a variável k está em expoentes nas fórmulas (b), (c) e (d). Isto é suficiente para concluir que saldos, amortizações e juros no SFA não variam linearmente.

Em particular, notemos que $A_k = \Big\{i.S_0/\big[1 - (1+i)^n\big]\Big\}.(1+i)^{k-1}$ (item (d)) é o termo geral da PG (A_k) com primeiro termo $A_1 = i.S_0/\big[1 - (1+i)^n\big]$ e razão $(1+i)$. Como não faz sentido taxa de juro i é positiva então $(1+i) > 0$. Logo, (A_k) é crescente, isto é, as amortizações no SFA crescem de modo exponencial, como havíamos mencionado anteriormente.

Da mesma forma que ocorre com o **T-3.2**, os itens (a), (b), (c) e (d) do **T-3.3** permitem obter o pagamento, o saldo, o juro e a amortização em certo prazo, sem precisar recorrer à tabela.

Em última análise, se a sequência de pagamentos periódicos for perpétua em vez de temporária, basta fazermos n crescer indefinidamente na fórmula (a). Assim, pela fórmula SPG_∞ obtemos $P = i.S_0$. Consequentemente, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $S_k = S_0$, $J_k = i.S_0$ e $A_k = 0$. Observemos que, no caso típico de série de pagamentos perpétua, que ocorre em um contrato de aluguel, o locatário, teoricamente, nunca se torna proprietário do bem alugado. Portanto, é coerente que, com o passar do tempo, o saldo devedor permaneça constante e igual ao saldo inicial, mesmo havendo pagamentos ininterruptos.

Podemos dizer que o SAC e o SFA se equivalem, pois, conforme vimos, os exemplos 3.6 e 3.7 constituem fluxos de caixa equivalentes, ou seja, as sequências de pagamentos anuais $\alpha = (10500\,;\ 9750\,;\ 9000\,;\ 8250)$ e $\beta = (9464{,}12\,;\ 9464{,}12\,;\ 9464{,}12\,;\ 9464{,}12)$, à taxa de juros de 10% ao ano, têm o mesmo valor presente de 30000. Porém, dependendo da situação, pode ser mais interessante um sistema do que o outro. Veremos isto na atividade **A.3**.

Sugerimos ainda a 4ª solução da atividade **A.1** e suas observações finais para introduzir o SFA. Também abordamos os dois sistemas de amortizações apresentados até aqui em **A.7**.

3.3.3 Outros sistemas de amortização

Há vários métodos de amortizar pagamentos. Além do SAC e do SFA, mencionaremos o SAM (sistema de amortização misto) e o SAA (sistema americano de amortizações).

O SAM caracteriza-se por ter cada pagamento P_k igual à média aritmética dos respectivos pagamentos no SAC e no SFA. Aplicando a taxa de juro sobre o saldo anterior S_{k-1}, obtemos o juro J_k e, deduzindo-o de P_k, obtemos a amortização A_k.

No SAA, são pagos apenas os juros sobre o saldo devedor até o penúltimo período da taxa utilizada e, no último período, paga-se a amortização única $A_n = S_0$ (saldo inicial) mais os respectivos juros J_n. Este sistema é bastante elucidativo no que concerne à cobrança de juros compostos não implicar, obrigatoriamente, a ocorrência ilegal dos "juros sobre juros" (anatocismo).

A partir das caracterizações acima, é possível construir tabelas de recorrência para o SAM e o SAA e obter fórmulas analogamente ao que foi feito nas subseções 3.3.1 e 3.3.2.

3.4 Um pouco mais sobre investimentos financeiros

Na introdução deste trabalho, explicamos que investimento financeiro é diferente de gasto, pois este não precisa gerar retorno financeiro, enquanto aquele sim. Também já falamos sobre os pilares do investimento (*rentabilidade*, *risco*, *liquidez*), sobre os perfis do investidor (*conservador*, *moderado*, *arrojado*), sobre princípios do investimento (reserva de emergência, diversificação, regularidade entre outros) e sobre as modalidades de renda fixa e variável. Na subseção 3.2.1, vimos ainda como analisar objetivamente a sua viabilidade pela TIR e pelo VPL. Este capítulo é um complemento a este estudo.

O indivíduo detentor dos conhecimentos acima, que sabe o poder exponencial dos juros compostos no tempo e que é financeiramente organizado e acostumado a poupar dinheiro está apto a se tornar um investidor de sucesso.

Em capítulos anteriores, apresentamos diagramas de fluxo de caixa de investimentos, mas não os representamos na forma tabular nem falamos de outro importante método para auxiliar sua análise: o PBD. As próximas subseções serão dedicadas a estes assuntos.

3.4.1 Tabela do fluxo de caixa de um investimento

Consideremos que o dinheiro valha TMA (taxa mínima de atratividade) para alguém que pretende investir S_0 reais (saldo inicial) no projeto X, durante n períodos da TMA, com sequência padrão de n rendimentos $\omega = (P_k)$.

A partir daqui, valores monetários serão inseridos no contexto de fluxos de caixa. Por isto, as quantias que até então eram absolutas, passarão a ter valores relativos.

Como qualquer investimento visa um ganho, pressupomos sempre retornos positivos. Por outro lado, a quantia investida inicialmente assume valor negativo. Observemos que esta análise pode ocorrer também nos empréstimos. Neste caso, haveria apenas uma inversão sinais, análoga à que ocorreu na seção 3.2. Para evitar confusões, chamaremos de fluxo de caixa o valor relativo de uma despesa ou receita em determinada data. Todas as movimentações monetárias referentes a um investimento financeiro serão o conjunto dos fluxos de caixa desta operação.

Sejam FC_k o fluxo de caixa no prazo k, $\mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,TMA)}$ o valor presente relativo do FC_k, mediante a TMA, e VPL_k o valor presente líquido relativo do investimento até o prazo k. Inicialmente, $\mathrm{FC}_0 = \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_0\,;\,TMA)} = VPL_0 = -S_0 < 0$. Para todo $k \geq 1$, temos $\mathrm{FC}_k = P_k > 0$, $\mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,TMA)} = P_k/(1+TMA)^k > 0$ e $VPL_k = VPL_{k-1} + \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,TMA)}$. Cada VPL_k, com $k \geq 1$, é uma soma algébrica, tal que, $VPL_k \leq 0$, enquando VPL_{k-1} for negativo; e $VPL_k > 0$ a partir do momento que VPL_{k-1} passa a ser positivo.

Isto está exposto na tabela a seguir - uma forma de complementar a representação do conjunto de fluxos de caixa feita com o diagrama da figura 3.2.

Figura 3.10: Tabela dos fluxos de caixa do projeto X.

k	FC_k	$\mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,TMA)}$	VPL_k
0	$-S_0$	$-S_0$	$-S_0$
1	P_1	$P_1/(1+TMA)^1$	$VPL_0 + \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_1\,;\,TMA)}$
2	P_2	$P_2/(1+TMA)^2$	$VPL_1 + \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_2\,;\,TMA)}$
3	P_3	$P_3/(1+TMA)^3$	$VPL_2 + \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_3\,;\,TMA)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	P_n	$P_n/(1+TMA)^n$	$VPL_{n-1} + \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_n\,;\,TMA)}$

Como $S_0 = \mathrm{VP}_{(\omega\,;\,TMA)} = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k/(1+TMA)^k$, então a soma das $n+1$ expressões da penúltima coluna é nula. Também nota-se que o VPL_n é o valor presente líquido do investimento, ou seja, por **D-3.1**: $VPL_n = \mathrm{VP}_{(\omega\,;\,TMA)} - S_0$. Isto pode ser provado pelo *PIF* ou adicionando membro a membro $VPL_0 = -S_0$ e $VPL_k = VPL_{k-1} + \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,TMA)}$ com $1 \leq k \leq n$. De modo análogo, obtemos $VPL_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \mathrm{FC}_j/(1+TMA)^j - S_0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Para exemplificar, retomemos o investimento de 30000 reais (S_0), com 48 rendimentos mensais de R$ 1000 (sequência γ de receitas), lembrando que a quantia investida é oriunda de um empréstimo à 0,8% ao mês (esta é a taxa mínima de atratividade: TMA).

No exemplo 3.5, mostramos que este investimento é viável pela TIR e pelo VPL. O nosso objetivo agora é detalhar seu conjunto dos fluxos de caixa em uma tabela, a fim de confirmar a sua viabilidade e obter outro parâmetro (subseção 3.4.2).

Reparemos que $\mathrm{FC}_0 = \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_0\,;\,0{,}8\%)} = VPL_0 = -30000$, que, para todo $k \geq 1$, temos $\mathrm{FC}_k = +1000$, $\mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,0{,}8\%)} = \mathrm{FC}_k/(1{,}008)^k$ e $VPL_k = VPL_{k-1} + \mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,0{,}8\%)}$. A partir daí, obtemos a figura 3.11.

Omitimos algumas linhas da referida tabela, evidenciando apenas as principais informações deste fluxo de caixa. No Capítulo 4, explicaremos como fazer este tipo de tabela no Excel e efetivaremos a sua construção na atividade **A.3** do Capítulo 5.

Na figura 3.11, observemos que $VPL_{48} = +9728{,}39$ é exatamente o VPL_{inv} obtido no exemplo 3.5 pela diferença $\mathrm{VP}_{(\gamma\,;\,0{,}8\%)} - 30000$. Daí, concluímos que o investimento é viável. A inviabilidade ocorreria se este valor presente líquido fosse negativo ou nulo.

No Capítulo 4, veremos como calcular a $TIR_{\mathrm{inv}} = 2{,}11\%$ ao mês a partir da planilha eletrônica feita no Excel.

Ademais, os valores da última coluna permanecem negativos até o 34º mês. O 35º mês começa negativo, mas fecha positivo. Portanto, o investimento em questão é plenamente reembolsado durante o 35º mês. A subseção seguinte tratará exatamente desta análise.

Figura 3.11: Representação tabular do fluxo de caixa do investimento de R\$ 30000, que gera 48 rendas mensais de R\$ 1000, considerando $TMA = 0{,}8\%$ ao mês.

k	FC_k	$\mathrm{VP}_{(\mathrm{FC}_k\,;\,0{,}8\%)}$	VPL_k
0	-30000	-30000	-30000
1	$+1000$	$+992{,}06$	$-29007{,}94$
2	$+1000$	$+984{,}19$	$-28023{,}75$
⋮	⋮	⋮	⋮
30	$+1000$	$+787{,}38$	$-3422{,}42$
31	$+1000$	$+781{,}13$	$-2641{,}29$
32	$+1000$	$+774{,}93$	$-1866{,}36$
33	$+1000$	$+768{,}78$	$-1097{,}58$
34	$+1000$	$+762{,}68$	$-334{,}90$
35	$+1000$	$+756{,}63$	$+421{,}72$
36	$+1000$	$+750{,}62$	$+1172{,}35$
⋮	⋮	⋮	⋮
48	$+1000$	$+682{,}17$	$+9728{,}39$

3.4.2 Payback Descontado

Existem outros métodos para analisar investimentos além da TIR e do VPL. Entre eles o *payback descontado*, que denotamos por PBD. De modo geral, ele é o prazo em que ocorre o reembolso da quantia investida em uma aplicação financeira.

Nas palavras de Puccini (2017), PBD

> é o tempo necessário para a recuperação do investimento inicial, levando-se em consideração o custo de oportunidade do capital investido. Ele é medido pelo tempo decorrido entre a data inicial do fluxo de caixa (ponto zero) e a data futura mais próxima até a qual o valor do investimento inicial é coberto pela soma dos valores presentes das parcelas positivas do fluxo de caixa.

O PBD de um investimento costuma ser obtido aplicando um método iterativo baseado no cálculo do valor presente de cada pagamento e dos valores presentes líquidos acumulados periodicamente até ele zerar ou até mudar de sinal. Se o zero for obtido, a iteração termina e o PBD é o prazo correspondente. Caso contrário, ou se aproxima o PBD para o primeiro k tal que $VPL_k > 0$ (é razoável considerar que a capitalização ocorre somente ao final de cada período da taxa) ou se calcula uma aproximação para o PBD fracionando a unidade de tempo entre $k-1$ e k, de modo que $VPL_{k-1} < 0 < VPL_k$ (este refinamento pode ocorrer considerando a capitalização mista ou a composta).

Resumindo, temos $k-1 < PBD \leq k$, com $VPL_{k-1} < 0 \leq VPL_k$, de modo que, se k pudesse assumir valores racionais, teríamos VPL_k tendendo a zero ao tomarmos k cada vez mais próximo do PBD, isto é, $\lim\limits_{k \to PBD} VPL_k = 0$.

Consideremos a taxa mínima de atratividade TMA e um investimento cujo conjunto de fluxos de caixa é constituído por uma única despesa inicial S_0 (valor investido) e por n receitas (rendimentos) P_k de uma sequência padrão periodizada conforme a TMA. Denotando por VP_k o valor presente das k primeiras rendas deste investimento, temos $\mathrm{VP}_k = \sum\limits_{j=1}^{k} P_k/(1+TMA)^j$. Daí, o valor presente líquido acumulado até o prazo k é $VPL_k = \mathrm{VP}_k - S_0$.

Retomando o exemplo 3.5, cujo fluxo de caixa está representado na figura 3.11, percebe-se que o valor presente líquido acumulado passa de negativo para positivo do 34º para o 35º mês. Logo, o PBD deste investimento ocorre neste intervalo de tempo.

Observemos que

$$\mathrm{VP}_{34} = \sum_{j=1}^{34} 1000/(1+0{,}8\%)^j \overset{\text{SPG}}{=} 1000.\big[1-1,008^{-34}\big]/(0{,}008) \cong 29665{,}10;$$

$$\mathrm{VP}_{35} = \sum_{j=1}^{35} 1000/(1+0{,}8\%)^j \overset{\text{SPG}}{=} 1000.\big[1-1,008^{-35}\big]/(0{,}008) \cong 30421{,}72.$$

Daí,

$$VPL_{34} \cong 29665{,}10 - 30000 = -334{,}90 < 0;$$

$$VPL_{35} \cong 30421{,}72 - 30000 = +421{,}72 > 0.$$

Assim, de fato, temos $34 \text{ meses} < PBD < 35 \text{ meses}$, pois $VPL_{34} < 0 < VPL_{35}$.

Como a taxa utilizada (TMA) é mensal, podemos considerar $PBD = 35$ meses. Neste caso, supomos que a capitalização ocorre apenas no final de cada mês.

Porém, conforme dissemos no Capítulo 2, é prática comum do mercado usar juros simples em prazos menores que o período da taxa. Por isto, habitualmente, aproxima-se o PBD por regras de *proporcionalidade*, ou seja, a capitalização mista predomina no cálculo do PBD.

Considerando esta hipótese no nosso exemplo, temos $PBD = (34+p)$ meses, onde p é uma fração do 35º mês proporcional à parte ainda não reembolsada no 34º mês. Logo, $(30421{,}72 - 29665{,}10)/1 = (30000{,}00 - 29665{,}10)/p$, ou seja, $(756{,}62)/1 = (344{,}90)/p$, donde $p = (344{,}90)/(756{,}62) \cong 0{,}5$. Portanto, $PBD \cong 34{,}5$ meses.

Generalizando, se $k-1 < PBD < k$, com $VPL_{k-1} < 0 < VPL_k$, então, na convenção linear, temos $PBD = (k-1)+p$, tal que $(\mathrm{VP}_k - \mathrm{VP}_{k-1})/1 = (S_0 - \mathrm{VP}_{k-1})/p$, isto é, $p = (S_0 - \mathrm{VP}_{k-1})/(\mathrm{VP}_k - \mathrm{VP}_{k-1})$.

Existe ainda o "payback simples" (PBS), que "desconsidera o valor do dinheiro no tempo" (CASTELO BRANCO, 2018). Apesar de não determinar com exatidão o tempo de retorno do investimento, o PBS tem uma grande vantagem na hora do cálculo, o que o torna útil como ferramenta para estimar uma aproximação por baixo do PBD.

Investindo-se a quantia S_0 (despesa única), com uma sequência padrão de rendas (P_k) (únicas receitas do investimento), podemos definir $S_0 = \sum_{k=1}^{PBS} P_k/(1+0)^k = \sum_{k=1}^{PBS} P_k$.

Ressaltamos um pequeno abuso de linguagem cometido na definição acima, pois consideramos a possibilidade de ocorrer $k = PBS$. Entretanto, $k \in \mathbb{N}$ e $PBS \in \mathbb{Q}$.

Particularmente, se $P_k = P$ para qualquer k, temos $S_0 = (PBS).(P)$, donde $PBS = S_0/P$. No exemplo anterior, temos $PBS = 30000/1000 = 30$. Daí, já sabemos que seu PBD é maior que 30 meses. Assim, podemos agilizar a obtenção do PBD. Em vez de construirmos a tabela inteira da figura 3.11, calculamos $VPL_{30} = -3422{,}42$ e seguimos obtendo valores presentes líquidos relativos até o 35º mês, quando o sinal muda.

O resto do processo foi realizado antes, atendendo à hipótese da capitalização mista.

Na capitalização composta, de acordo com Samanez (2002), o método do payback descontado basicamente consiste em determinar o valor do PBD na seguinte equação: $\sum_{k=1}^{PBD} P_k/(1+TMA)^k = S_0$, onde S_0 é o valor investido num projeto com rendas P_k de uma sequência padrão periodizada conforme a taxa mínima de atratividade TMA.

A equação acima apresenta o mesmo abuso de linguagem da definição de PBS, pois considera que o índice $k \in \mathbb{N}$ pode assumir o valor $PBD \in \mathbb{Q}$. Porém, ela é muito interessante porque algebriza a essência do significado de PBD.

Particularmente, se $P_k = P$ para todo k, então $\sum_{k=1}^{PBD} P/(1+TMA)^k = S_0 \overset{\text{SPG}}{\Longrightarrow} P.\big[1-(1+TMA)^{-PBD}\big]/TMA = S_0$. Daí, $PBD = -\log\big[1-S_0.TMA/P\big]/\log(1+TMA)$. Utilizamos aqui alguns conhecimentos básicos sobre logaritmos (Apêndice F).

A obtenção do último resultado ficará clara ao revisitarmos o exemplo 3.5.

Consideremos agora o regime de juros compostos para qualquer prazo, no último exemplo. Assim, $\sum_{k=1}^{PBD} 1000/(1+0{,}8\%)^k = 30000 \overset{\text{SPG}}{\Longrightarrow} 1000.\big[1-(1{,}008)^{-PBD}\big]/(0{,}008) = 30000$. Multiplicando os dois membros por $-(0{,}008)/1000$ e adicionando-lhes a unidade, obtemos $(1{,}008)^{-PBD} = 0{,}76$. Aplicando conhecimentos sobre logaritmos, chegamos em $\log(1{,}008)^{-PBD} = \log(0{,}76)$, donde $PBD = -\log(0{,}76)/\log(1{,}008) \cong 34{,}5$.

Observamos que, desde a taxa 0,8% ao mês (equivalente aproximada de 10% ao ano) até os últimos logaritmos decimais, foram realizadas várias aproximações, que acarretam imprecisões nos resultados apresentados. Por exemplo, o PBD calculado na capitalização mista não é exatamente o mesmo da capitalização composta.

Finalmente, vejamos como empregar o PBD na análise de investimentos.

Considere investir determinado valor em um projeto planejado para durar n períodos da TMA. Se seu PBD extrapolar n, o projeto terminaria antes de haver a recuparção do valor investido. Se o PBD coincidir com o prazo final do projeto, seria indiferente investir ou não nele. Logo, um projeto só é viável se tiver PBD inferior à sua duração. Como o nosso exemplo de investimento dura 48 meses e tem $PBD = 34{,}5$, então ele é viável.

Em geral, se estabelece um prazo máximo m para o reembolso do investimento. Neste caso, a sua viabilidade fica condicionada à ocorrência do $PBD \leq m$. Isto será trabalhado na atividade **A.3**.

Porém, contrariando a intuição, entre dois investimentos, o de menor PBD pode não ser o mais atrativo, pois este método desconsidera todo fluxo de caixa depois do PBD. Para compreender isto, basta pensar em dois investimentos X e Y, ambos planejados para durar n anos, que tenham o mesmo $PBD < n$ e o mesmo conjunto de fluxos de caixa, exceto pelo fato de apenas X possuir um *valor residual* a ser resgatado no n-ésimo ano. Obviamente, X é mais vantajoso do que Y.

O PBD deve ser visto apenas como um indicador de liquidez. Ele é um método auxiliar ao VPL e à TIR. Logo, dadas duas opções de investimento, o PBD não deve ser utilizado de modo independente para decidir qual a opção mais lucrativa.

Tomando $\Delta(i\,;\,m) = \sum_{k=1}^{m} P_k/(1+i)^k$ e considerando $\sum_{k=1}^{PBD} P_k/(1+TMA)^k = S_0$ e a definição **D-3.1**, podemos redefinir VPL, TIR e PBD das seguintes formas:

$$VPL = \Delta(TMA\,;\,n) - S_0\ ,\quad \Delta(TIR\,;\,n) - S_0 = 0\ ,\quad \Delta(TMA\,;\,PBD) - S_0 = 0.$$

Capítulo 4

Recursos Tecnológicos

Este capítulo foi elaborado levando-se em conta as recomendações do MEC em relação ao uso adequado de recursos tecnológicos no ensino da matemática, o notável interesse espontâneo dos jovens pela tecnologia, a acessibilidade cada vez maior a tais recursos (muitos deles gratuitos), a escassez de material específico para esta abordagem no ensino médio e, principalmente, a sua enorme importância na resolução de problemas de MF.

4.1 Alguns aspectos legais

A LDB estabelece, no seu Art. 35, entre as finalidades do ensino médio "a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina" (BRASIL, 1996). No Art. 35-A, a LDB determina que a BNCC definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio em quatro áreas do conhecimento, entre elas "matemática e suas tecnologias". Em particular, o parágrafo 8º (I) deste artigo diz que conteúdos, metodologias e formas de avaliação devem ser organizados nas redes de ensino, de tal modo que no fim do ensino médio o estudante domine "os princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna".

Neste ensejo, a BNCC propõe que

> os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.
>
> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar

> em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018)

A BNCC estabelece ainda que a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes do ensino médio o desenvolvimento de cinco competências específicas. Entre elas, destacamos para este capítulo: utilizar a matemática para interpretar situações em diversos contextos, inclusive relacionados a questões tecnológicas; investigar desafios contemporâneos e tomar decisões éticas, com base na análise das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros; compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.); averiguar e criar conjecturas a respeito de diferentes propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias (BRASIL, 2018).

Antes da elaboração da BNCC, os PCN já diziam que, no contexto sócio-cultural do ensino da Matemática, deve-se "utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades". Neste texto, também é mencionado que, "entre os maiores desafios para a atualização pretendida no aprendizado de Ciência e Tecnologia, no Ensino Médio, está a formação adequada de professores, a elaboração de materiais instrucionais apropriados (...)" (BRASIL, 1999).

Ainda segundo os PCN, com o advento da sociedade pós-industrial,

> a disseminação das tecnologias da informação nos produtos e nos serviços, a crescente complexidade dos equipamentos individuais e coletivos e a necessidade de conhecimentos cada vez mais elaborados para a vida social e produtiva, as tecnologias precisam encontrar espaço próprio no aprendizado escolar regular, de forma semelhante ao que aconteceu com as ciências, muitas décadas antes, devendo ser vistas também como processo, e não simplesmente como produto. A tecnologia no aprendizado escolar deve constituir-se também em instrumento da cidadania, para a vida social e para o trabalho (BRASIL, 1999).

Como orientações educacionais complementares aos PCN, voltadas para a matemática do ensino médio ("PCN+"), ressaltamos a seguinte competência a ser buscada:

> Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos "com lápis e papel", e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento (BRASIL, 2002).

4.2 Principais recursos tecnológicos usados em MF

As tecnologias mais úteis para a MF são as calculadoras e as planilhas eletrônicas.

Existem vários tipos de calculadoras no mercado. As mais comuns são a padrão e a científica, que, desde o início deste trabalho, pressupomos conhecidas e acessíveis.

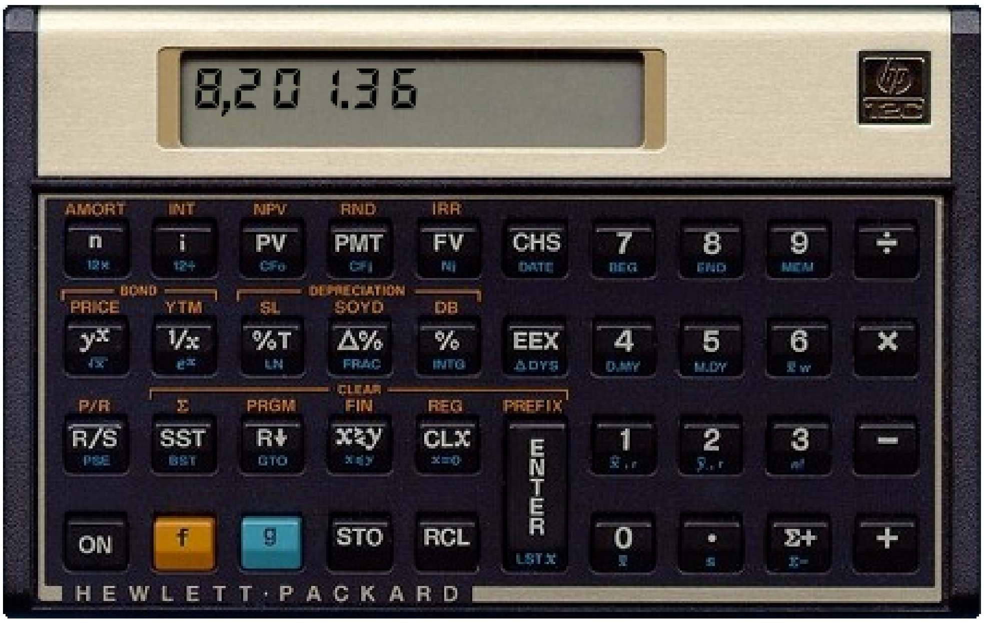
Grande parte dos problemas de MF pode ser resolvido com estas ferramentas. As abordagens apresentadas até aqui ocorreram considerando-se o uso deste tipo de tecnologia. Porém, a dificuldade que tivemos em alguns cálculos, seria eliminada por meio de funções disponíveis em calculadoras financeiras como a HP12c e em planilhas eletrônicas como o Excel. Por isto, dedicaremos este capítulo a elas, com o objetivo de aplicar tais recursos na retomada de exemplos anteriores.

Para pormenorizar este estudo, recomendamos o guia do usuário da HP12c (HP, 2004) e tutoriais disponíveis no Excel (MICROSOFT, 2016), como o "Bem-vindo ao Excel" e outros. As próximas subseções foram elaboradas a partir daí. Estas também podem ser boas opções para uso didático em sala de aula.

4.2.1 HP12c

A calculadora financeira HP12c é o modelo 12c lançado em 1981 pela empresa norte-americana Hewlett-Packard Company, que já produziu vários outros, como a HP11c (calculadora científica) e a HP16c (calculadora própria para programadores de computador), ambas com aparência externa semelhante a HP12c.

Figura 4.1: HP12c (WEB..., [2021b?]).



Caso não se tenha acesso à HP12c física, existem simuladores (ou emuladores) virtuais disponíveis na internet, alguns gratuitos para download e para uso on-line (WEB..., [2021a?], [2021b?], [2021c?], [2021d?]).

Estrutura física da HP12c e notações

Toda tecla da HP12c é denominada pela sua função primária, impressa na face superior da tecla, geralmente, em cor branca. Porém, uma tecla pode possuir funções secundárias impressas em amarelo (acima da tecla) e em azul (na parte inferior da tecla). Iremos denominá-las de funções amarelas e funções azuis, respectivamente. Algumas teclas possuem ainda funções implícitas.

Para evitar ambiguidades, contornaremos com um retângulo cada função primária de uma tecla da HP12c, grafando-as em negrito e entre colchetes. Mostramos no quadro abaixo como serão representadas todas estas funções primárias, distribuídas conforme a HP12c, exceto pela tecla [**ENTER**], que na máquina, fica na vertical.

Figura 4.2: Funções primárias da HP12c.

[**n**]	[**i**]	[**PV**]	[**PMT**]	[**FV**]	[**CHS**]	[**7**]	[**8**]	[**9**]	[**÷**]
[$\boldsymbol{y^x}$]	[**1/$\boldsymbol{x}$**]	[**%T**]	[**Δ%**]	[**%**]	[**EEX**]	[**4**]	[**5**]	[**6**]	[**×**]
[**R/S**]	[**SST**]	[**R↓**]	[$\boldsymbol{x \lessgtr y}$]	[**CL$\boldsymbol{x}$**]		[**1**]	[**2**]	[**3**]	[**−**]
[**ON**]	[**f**]	[**g**]	[**STO**]	[**RCL**]	[**ENTER**]	[**0**]	[**·**]	[**Σ+**]	[**+**]

Percebemos aqui uma oportuna conexão intradisciplinar com o conceito de matriz, que pode facilitar a localização das teclas da HP12c. Isto porque existe uma correspondência "quase" biunívoca entre as teclas da máquina (figura 4.1) e os termos da matriz genérica $\mathcal{A} = (a_{p;q})_{4\times 10}$, constituída por 4 linhas e 10 colunas, de modo que cada termo $a_{p;q}$ ocupa a linha p e a coluna q.

Exceto pelos os termos $a_{3;6}$ e $a_{4;6}$, que correspondem ambos à tecla [**ENTER**] na figura 4.1, cada um dos outros termos de $\mathcal{A}$ associa-se reciprocamente a uma única tecla da HP12c. Na figura 4.2, [**ENTER**] corresponde ao termo $a_{4;6}$, enquanto $a_{3;6}$ fica "desocupado". De uma forma ou de outra podemos explorar esta intradisciplinaridade

Por exemplo, $a_{1;1} =$ [**n**], $a_{1;10} =$ [**÷**], $a_{4;10} =$ [**+**], $a_{4;1} =$ [**ON**].

Toda função secundária será expressa ainda entre colchetes, mas sem o contorno retangular e sem grafia em negrito. Exemplificando, temos as funções amarelas [AMORT], [INT], [NPV], [RND] e [IRR] das teclas da primeira linha. As funções azuis destas mesmas teclas são [12×], [12÷], [CF_0], [CF_j] e [N_j].

A HP12c possui apenas duas teclas que não são pretas: uma é amarelada e a outra é azulada. Estas são, respectivamente, $a_{4;2} = \boxed{[\mathbf{f}]}$ e $a_{4;3} = \boxed{[\mathbf{g}]}$. Obviamente, elas sevem para acionar as funções secundárias amarelas e azuis. Por exemplo, a função que mais será utilizada é a função amarela da tecla $a_{3;5}$, indicada por [REG]. Esta função é acionada teclando $\boxed{[\mathbf{f}]}$ seguida de $\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$. Denotaremos [REG] $= \boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$.

As teclas numéricas e aritméticas da HP12c, que exercem as funções de uma calculadora padrão, vão de $a_{1;7}$ até $a_{4;10}$, com exceção de $a_{4;9}$, que é um auxiliar estatístico.

Entre as funções típicas de calculadora científica presentes na HP12c, destacamos as que permitem calcular potências e logaritmos naturais, cuja base é o número de Euler e. Estas funções correspondem, nesta ordem, a $\boxed{[\boldsymbol{y^x}]}$ e [LN] $= \boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{\%T}]}$.

Ressaltamos que as teclas da HP12c mais importantes para a MF são as seis primeiras da linha 1 da matriz $\mathcal{A}$: $\boxed{[\mathbf{n}]}$, $\boxed{[\mathbf{i}]}$, $\boxed{[\mathbf{PV}]}$, $\boxed{[\mathbf{PMT}]}$, $\boxed{[\mathbf{FV}]}$, $\boxed{[\mathbf{CHS}]}$.

As teclas que exercem estas funções possuem as funções secundárias mencionadas anteriormente, que também são bastante úteis para a MF.

Oportunamente, esta visão tabular da HP12c pode ser aproveitada para introduzir o uso do Excel.

Funcionamento básico da HP12c

A HP12c foi desenvolvida especificamente para realizar cálculos financeiros. A funcionalidade desta calculadora para resolver problemas que exigem tais cálculos é proveniente do seu sistema operacional.

Entre as principais características deste sistema, destacamos a sua grande capacidade de memória que é utilizada com base na *RPN* (Reverse Polish Notation, isto é, notação polonesa reversa) e no método *pilha operacional* (arquivo macro composto por quatro subarquivos de memórias temporárias que operam de modo sequencial e cíclico). Mas antes de falar destes conceitos, vejamos como colocar a HP12c para funcionar nas configurações utilizadas neste trabalho.

A HP12c vem configurada de fábrica no “modo original”. Neste modo, ela exibe números aproximados com duas casas decimais, adota o ponto como separador entre a parte inteira e a não inteira do número e insere automaticamente a vírgula a cada três dígitos. A figura 4.1 representa uma HP12c em escala real, configurada desta forma. O número mostrado no visor “8,201.36” é, portanto, oito mil, duzentos e um e trinta e seis centésimos.

A tecla $\boxed{\textbf{[ON]}}$ tem a função primária de ligar e desligar a HP12c e uma função implícita de inverter o uso da vírgula e do ponto. Para reconfigurar a calculadora no modo usual no Brasil, desligamos a máquina e a religamos com a tecla $a_{4;8} = \boxed{[\cdot]}$ pressionada. Nas versões virtuais citadas, basta teclar $\boxed{\textbf{[ON]}}$. A partir daqui, iremos considerar HP12c configurada desta forma e ligada. Assim, o número anterior passa a ser expresso na forma "8.201,36".

Outra função implícita que pode ser útil é a de mudar a quantidade de casas decimais. Pressionando $\boxed{[\mathbf{f}]}$ seguida de alguma tecla numérica, o visor mostra valores aproximados com esta quantidade de casas decimais. Por exemplo, inserimos a aproximação 3,141592654 do número irracional π limpando o visor com $\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ e teclando $\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\cdot]}\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{9}]}\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{6}]}\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{4}]}$. Como a máquina está configurada para exibir apenas duas casas decimais, ao teclarmos $\boxed{[\mathbf{ENTER}]}$, é exibido 3,14. Porém, a HP12c opera na sua capacidade máxima; logo os outros algarismos ficam salvos internamente. Para a máquina exibir todas as nove casas decimais inseridas, devemos teclar $\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{9}]}$. Retornamos para aproximação em centésimos, teclando $\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{2}]}$. Como o objeto de estudo da MF é o dinheiro, cuja representação numérica tem duas casas decimais, utilizaremos este formato.

Note que não espaçamos teclas formadoras de um número, assim como justapomos duas ou mais teclas que precisam ser pressionadas em sequência para acionar uma função secundária ou implícita. De modo geral, as teclas com função única serão justapostas.

Voltando a falar da *pilha operacional*, é interessante saber que as memórias temporárias da HP12c são $\boldsymbol{x}$ (número do visor), $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{z}$ (registros numéricos internos). Acionando $\boxed{[\mathbf{ENTER}]}$ e outras funções, levamos o número de $\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{y}$. Caso haja um número lá, ele é transferido para $\boldsymbol{z}$ e um eventual número nesta memória vai para $\boldsymbol{t}$, cujo registro precedente, por sua vez, é apagado. Isto ficará mais claro no próximo exemplo.

Além das 4 memórias temporárias, a HP12c dispõe de 5 memórias financeiras, correspondentes às funções de $a_{1;1}$ até $a_{1;5}$, que iremos detalhar adiante, mais 20 memórias fixas, que vão de "0" a "9" e de ".0" a ".9".

Diante da possibilidade de tantos registros de armazenamento, ao efetuar uma nova operação na HP12c, recomenda-se limpar os dados das operações já finalizadas. Na linha 3 da matriz $\mathcal{A}$, estão as teclas cujas funções amarelas abarcadas pelo nome CLEAR são responsáveis por esta limpeza de dados. A principal é $\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$. Se acionada sozinha, esta função deleta apenas o registro da memória $\boldsymbol{x}$, inserindo zeros no visor. Mas a sua função secundária [REG] $= \boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ apaga todos os registradores (memórias temporárias, fixas e financeiras), exceto a memória de programação.

Antes de iniciar a resolução de um problema na HP12c que não necessite de valores inseridos anteriormente nela, devemos sempre acionar [REG].

Diferente de outras calculadoras, a HP12c é programada com a *RPN*. Isto otimiza o seu funcionamento. Para um cálculo aritmético básico, inserimos o primeiro número e teclamos $\boxed{[\mathbf{ENTER}]}$ para registrá-lo em $\boldsymbol{x}$; depois teclamos o segundo número, que fica em $\boldsymbol{x}$ e envia o primeiro para $\boldsymbol{y}$; finalizamos com a operação desejada entre os registros de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$, nesta ordem. Em particular, dividimos o registro anterior de 3,141592654 em $\boldsymbol{x}$ por 10 teclando $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\div]}$. O resultado calculado é 0,3141592654, mas a máquina está configurada para mostrar a aproximação 0,31.

Exemplo 4.1: Podemos calcular o produto de 100 por $(1{,}1)^3$ teclando:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{ENTER}]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\,\cdot\,]}\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{ENTER}]}$ $\boxed{[\mathbf{3}]}$ $\boxed{[\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{x}}]}$ $\boxed{[\times]}$.

Detalhemos a resolução acima, incluindo explicações quanto à *pilha operacional*:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ limpa possíveis registros anteriores;

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{ENTER}]}$ armazena 100 na memória $\boldsymbol{x}$, exibindo 100,00 no visor;

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\,\cdot\,]}\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{ENTER}]}$ armazena 1,1 em $\boldsymbol{x}$, mostrando 1,10 no visor (100 vai para $\boldsymbol{y}$);

$\boxed{[\mathbf{3}]}$ faz o número 3 ser armazenado em $\boldsymbol{x}$, levando 1,1 para $\boldsymbol{y}$ e 100 para $\boldsymbol{z}$;

$\boxed{[\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{x}}]}$ calcula $(1{,}1)^3 = 1{,}331$, exibindo a aproximação 1,33 no visor (100 volta para $\boldsymbol{y}$);

$\boxed{[\times]}$ multiplica 100 por 1,331 e registra o resultado 133,1 em $\boldsymbol{x}$, esvaziando $\boldsymbol{y}$.

Antes de introduzirmos o uso das funções financeiras da HP12c, é necessário destacar outras duas características do seu "modo original": a capitalização mista e os pagamentos postecipados. Originalmente, a máquina opera desta forma, mas ela pode ser reconfigurada para operar com a capitalização composta e com pagamentos antecipados.

Utilizamos $\boxed{[\mathbf{STO}]}\boxed{[\mathbf{EEX}]}$ para ativar e desativar o "modo juros compostos". A função azul [BEG] = $\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{7}]}$ ativa o "modo begin" dos pagamentos antecipados e a função azul [END] = $\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{8}]}$ ativa o "modo end" dos pagamentos postecipados, que corresponde ao "modo original". Exemplificaremos adiante o uso destas configurações.

As teclas da HP12c mais úteis para a MF são as que exercem funções financeiras:

- $\boxed{[\mathbf{n}]}$ (number of payments ou número de pagamentos),
- $\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ (interest rate ou taxa de juro),
- $\boxed{[\mathbf{PV}]}$ (present value ou valor presente),
- $\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ (periodic payment amount ou valor de pagamento periódico),
- $\boxed{[\mathbf{FV}]}$ (future value ou valor futuro).

Estas 5 teclas servem tanto para registrar valores e quanto para calculá-los.

No uso das funções financeiras, a HP12c convenciona sinais opostos para entradas e saídas de valores monetários ("lógica do contador"). Estes são, portanto, valores relativos pertencentes a um conjunto de fluxos de caixa.

Neste contexto, será muito útil a função $\boxed{\textbf{[CHS]}}$ (change sign ou mudar sinal).

Podemos interpretar o exemplo 4.1 como o cálculo do montante gerado por 100 reais, a 10% ao ano, após 3 anos. Nesta interpretação, teclamos:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ $\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{FV}]}$.

Explicando melhor esta sequência resolutiva, acionamos:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ para limpar registros anteriores;

$\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ para registrar o prazo de 3 anos;

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ para registrar a taxa de juros de 10% ao ano;

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ para registrar -100 no valor presente;

$\boxed{[\mathbf{FV}]}$ para calcular o valor futuro 133,10.

Aritmeticamente, este resultado é obtido calculando $100.(1+10\%)^3$, que corresponde ao montante procurado na capitalização composta.

Conforme vimos na subseção 2.4.8, as capitalizações mista e composta produzem o mesmo montante num prazo inteiro, a partir do mesmo capital e da mesma taxa. Assim, $\mu(100\,;\,10\%\,;\,3) \;=\; M(100\,;\,10\%\,;\,3)$, ou seja, $100.(1+10\%)^{\lfloor 3\rfloor}.\Big[1+(10\%).\big(3-\lfloor 3\rfloor\big)\Big] = 100.(1+10\%)^3$. Por isto, sempre que o problema tratar de um prazo $n \in \mathbb{Z}$ podemos utilizar a HP12c no "modo original", mas, se n não for inteiro e se a capitalização for composta, então será necessário ativar o "modo juros compostos". Afinal, temos $M(C\,;\,i\,;\,n) = C.(1+i)^n < C.(1+i)^{\lfloor n\rfloor}.\Big[1+i.\big(n-\lfloor n\rfloor\big)\Big] = \mu(C\,;\,i\,;\,n),\ \forall n \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z}$. Usamos aqui **T-2.1** e **T-2.3**. Analisaremos este caso no exemplo 4.2.

Devido à última solução, 133,10 fica na memória $\boldsymbol{x}$ e os outros registros permanecem nas respectivas memórias financeiras, podendo ser retomados para outros cálculos. Por exemplo, podemos aproveitar estes registros para calcular o valor futuro no 4º ano, teclando $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\,\cdot\,]}\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\times]}$, para multiplicar 133,10 pelo fator de capitalização (1,1), ou teclando $\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$, para substituir o prazo de 3 anos por 4 anos, e, em seguida $\boxed{[\mathbf{FV}]}$.

Obtemos assim 146,41, que corresponde a $M(100;10\%;4) = 100.(1+10\%)^4$.

Notemos ainda que foi considerada a despesa 100 no valor presente, atribuindo-lhe o sinal "$-$", pois queríamos o valor futuro positivo. Se não teclássemos $\boxed{[\mathbf{CHS}]}$ na sequência resolutiva anterior, teríamos a receita 100 no valor presente e $-133{,}10$ no valor futuro.

O processo para calcular o valor futuro a partir do prazo, da taxa e do valor presente é análogo ao que utilizamos para outras situações em que sejam dadas três das variáveis atribuídas a $\boxed{[\mathbf{n}]}$, $\boxed{[\mathbf{i}]}$, $\boxed{[\mathbf{PV}]}$, $\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ ou $\boxed{[\mathbf{FV}]}$, a fim de se descobrir a quarta, desde que se conheça o prazo ou a taxa (pelo menos um destes dois parâmetros necessita ser informado). Estes 5 registros financeiros podem ser qualquer número racional (inclusive negativo), mas sem desrespeitar a mencionada convenção de sinais para os valores monetários e observando as ressalvas que faremos a seguir quanto aos prazos.

Exemplo 4.2: Vejamos agora como calcular o montante gerado por 100 reais, à 10% ao ano, após 3 anos e 144 dias, ou seja, em 3,4 anos (exemplo 2.5).

Considerando a HP12c na sua configuração original, obtemos $\mu(100;10\%;3{,}4) = 100.\big(1+10\%\big)^3.\Big[1+10\%.(0{,}4)\Big] \cong 138{,}42$, teclando:

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}$ $\boxed{[3]}\boxed{[\cdot]}\boxed{[4]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ $\boxed{[1]}\boxed{[0]}\boxed{[\mathbf{i}]}$ $\boxed{[1]}\boxed{[0]}\boxed{[0]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{FV}]}$.

Para calcular o montante em juros compostos, basta acrescentar $\boxed{[\mathbf{STO}]}\boxed{[\mathbf{EEX}]}$ à última solução e acionar novamente $\boxed{[\mathbf{FV}]}$ (talvez seja preciso pressionar duas vezes esta tecla). Assim é calculado $M(100;10\%;3{,}4) = 100.(1+10\%)^{3{,}4} \cong 138,27$.

Este é o "modo juros compostos". Ele fica indicado no visor da máquina pela letra C. Para desativá-lo, é necessário teclar novamente $\boxed{[\mathbf{STO}]}\boxed{[\mathbf{EEX}]}$. Consideremos isto feito para os próximos exemplos.

Esteja a HP12c no "modo original" ou no "modo juros compostos", com seus respectivos valores futuros registrados. Retornamos à taxa 10,00 porcento ao ano teclando $\boxed{[\mathbf{i}]}$ e ao valor presente $-100{,}00$ teclando $\boxed{[\mathbf{PV}]}$. Porém, se teclarmos $\boxed{[\mathbf{n}]}$, a máquina retorna o prazo 4, em vez dos esperados 3,4. Isto ocorre porque quando a variável procurada é o prazo e seu valor não é inteiro, a HP12c arredonda para o próximo inteiro maior que ele.

Este funcionamento é justificado pelo fato de a HP12c considerar que a capitalização ocorre apenas no final do período da taxa. Em particular, com uma taxa de juro anual, a máquina não considera que o dinheiro tenha sido capitalizado após 3 anos e 144 dias, mas somente após completar o quarto ano.

Podemos ainda interpretar o exemplo 4.2 como uma dívida de R$ 100, à 10% ao ano, que devia ser quitada em 3 anos, mas foi paga com atraso de 144 dias. Neste caso, os juros moratórios seriam simples e calculados sobre $M(100;10\%;3) = 133{,}10$. A HP12c tem uma função específica para calculá-lo: [INT] = $\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{i}]}$. Esta função exige taxa de juro ao ano e prazo em dias. Logo, obtemos os referidos juros simples de mora, teclando:

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}$ $\boxed{[1]}\boxed{[4]}\boxed{[4]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ $\boxed{[1]}\boxed{[0]}\boxed{[\mathbf{i}]}$ $\boxed{[1]}\boxed{[3]}\boxed{[3]}\boxed{[\cdot]}\boxed{[1]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{i}]}$.

A HP12c retorna $-5{,}32$, que é o valor aproximado dos juros, em termos relativos.

Em termos absolutos, estes juros são calculados aritmeticamente pela diferença $M_s(133{,}10; 10\%; 144/360) - 133{,}10$ ou pelo produto $(133{,}10).(10\%).(144/360)$. Utilizamos aqui **T-2.2**: $M_s(C; i; n) = C.(1+i)^n$ e $J = C.i.n$.

Para obter o valor da dívida após o atraso, basta acionar $\boxed{[+]}$ após a última sequência de teclas da HP12c. O resultado corresponde a $M_s(133{,}10; 10\%; 144/360) = -138{,}42$.

A primeira solução exibida pela HP12c, considera o ano comercial de 360 dias, mas a máquina também calcula internamente os juros exatos adotando o ano civil de 365 dias. Estes juros são acessados pressionando $\boxed{[\mathbf{R}\downarrow]}$. O cálculo aritmético correspondente é $M_s(133{,}10; 10\%; 144/365) - 133{,}10 = (133{,}10).(120\%).(12/365) \cong 5{,}25$ (desconsideramos novamente o sinal negativo que a HP12c não dispensa).

Até aqui, utilizamos a HP12c apenas no contexto do Capítulo 2. Vejamos agora algumas aplicações desta calculadora ao Capítulo 3. Neste ensejo, empregaremos $\boxed{[\mathbf{PMT}]}$, o "modo end" e o "modo begin", assim como as seguintes funções secundárias:

$[\mathrm{CF_0}] = \boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ (cash flow zero ou fluxo de caixa inicial),

$[\mathrm{CF_j}] = \boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ (cash flow j ou fluxo de caixa da posição j),

$[\mathrm{N_j}] = \boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ (number of times $\mathrm{CF_j}$ ou número de ocorrências do último $\mathrm{CF_j}$),

$[\mathrm{IRR}] = \boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ (interest rate of return ou taxa interna de retorno ou),

$[\mathrm{NPV}] = \boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ (net presente value ou valor presente líquido).

Retomemos o empréstimo de 30000 reais a 10% ao ano, quitado em 4 pagamentos anuais de mesmo valor nominal (exemplo 3.4). O valor destas prestações pode ser calculado na HP12c, teclando:

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}\ \boxed{[4]}\boxed{[\mathbf{n}]}\ \boxed{[1]}\boxed{[0]}\boxed{[\mathbf{i}]}\ \boxed{[3]}\boxed{[0]}\boxed{[0]}\boxed{[0]}\boxed{[0]}\boxed{[\mathbf{PV}]}\ \boxed{[\mathbf{PMT}]}$.

Esmiucemos esta solução:

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}$ limpa a memória;

$\boxed{[4]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ registra o prazo de 4 anos;

$\boxed{[1]}\boxed{[0]}\boxed{[\mathbf{i}]}$ registra a taxa anual de 10%;

$\boxed{[3]}\boxed{[0]}\boxed{[0]}\boxed{[0]}\boxed{[0]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ registra a receita inicial de 30000;

$\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ calcula o pagamento anual: $-9464{,}12$ (despesa).

O valor absoluto 9464,12 é o P da equação $\sum_{k=1}^{4} P/(1,1)^k = 30000$, a qual decorre do deslocamento das prestações P para a data zero, mediante a taxa de 10% ao ano.

Daí, aplica-se SPG para chegar no resultado. Este é o termo da sequência de pagamentos padrão e constantes β, que vimos no exemplo 3.4.

Neste caso, foi considerada a postecipação dos pagamentos. Se eles fossem antecipados, bastaria acrescentar $\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{7}]}\ \boxed{[\mathbf{PMT}]}$, sem apagar a memória. Desta forma, a máquina retorna $-8603{,}75$, pois este é o valor P tal que $\sum_{k=0}^{3} P/(1,1)^k = 30000$ (solução análoga à da equação anterior). Daí, voltemos ao "modo end" acionando $\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{8}]}$.

Uma das mais úteis aplicações da HP12c é o cálculo de taxas de juros. No exemplo anterior, para obtermos algebricamente a taxa i do empréstimo de 30000 reais quitado pela sequência β, teríamos que resolver a equação de quarto grau $\sum_{k=1}^{4} 9464{,}12/(1+i)^k = 30000$, para a qual não existe uma fórmula resolutiva. No Capítulo 3, empregamos um método numérico para aproximar o valor da i (subseção 3.2.1). Vejamos como eliminar todo aquele trabalho, calculando esta taxa na HP12c:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ limpa a memória;

$\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ registra o prazo de 4 anos;

$\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ registra 30000 no valor presente;

$\boxed{[\mathbf{9}]}\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{6}]}\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\,\cdot\,]}\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra $-9464{,}12$ nos pagamentos anuais;

$\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ calcula a taxa juro igual a 10% ao ano.

Lembremos que esta taxa é a TIR do empréstimo, ou seja, o seu custo. Vejamos como obtê-la na HP12c utilizando [IRR], [CF_0], [CF_j] e [N_j]:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ limpa a memória;

$\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ registra 30000 no fluxo de caixa inicial;

$\boxed{[\mathbf{9}]}\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{6}]}\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\,\cdot\,]}\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra $-9464{,}12$ no 1º fluxo de caixa;

$\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ registra 4 ocorrências de $-9464{,}12$ (4 anuidades);

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ calcula a $TIR = 10\%$ ao ano (custo do empréstimo associado a β).

De modo análogo, calculamos a $TIR = 2{,}11\%$ ao mês do investimento de 30 mil com 48 rendimentos mensais de mil (pertencentes à sequência γ).

Notemos que a primeira forma de calcular a TIR com as funções financeiras primárias é possível sempre que houver somente uma entrada inicial e saídas pertencentes a uma sequência padrão constante ou quando existir uma única despesa inicial e receitas pertencentes a uma sequência padrão constante.

A segunda forma é indispensável quando houver mais de dois fluxos de caixa diferentes. Por exemplo, o empréstimo de 30000 reais a 10% ao ano, quitado por quatro pagamentos anuais da sequência padrão $\alpha = (10500\,;\,9750\,;\,9000\,;\,8250)$. Nesta situação, calculamos a TIR da seguinte forma:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ limpa a memória;

$\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ registra 30000 no fluxo de caixa inicial;

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra -10500 no 1º fluxo de caixa;

$\boxed{[\mathbf{9}]}\boxed{[\mathbf{7}]}\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra -9750 no 2º fluxo de caixa;

$\boxed{[\mathbf{9}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra -9000 no 3º fluxo de caixa;

$\boxed{[\mathbf{8}]}\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra -8250 no 4º fluxo de caixa;

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ calcula $TIR = 10\%$ ao ano (custo do empréstimo associado a α).

Retomemos agora o exemplo 3.5, no qual o empréstimo de 30 mil à 10% ao ano, ou seja, à 0,8% ao mês, foi investido em algo com a finalidade de se obter 48 receitas mensais de mil por mês (sequência γ). Sabemos que o investimento tem $TMA = 0{,}8\%$ ao mês. Queremos fazer uma análise completa deste investimento.

Vejamos como obter a TIR e o VPL deste investimento utilizando [IRR] e [NPV]:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ limpa a memória;

$\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\,\cdot\,]}\boxed{[\mathbf{8}]}\boxed{[\mathbf{i}]}$ registra a $TMA = 0{,}8\%$ ao mês;

$\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ registra -30000 no fluxo de caixa inicial;

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra 1000 no 1º fluxo de caixa;

$\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{8}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ registra 48 ocorrências de 1000 (mensalidades recebidas);

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ calcula a $TIR = 2{,}11\%$ ao mês (rentabilidade do investimento associado a γ);

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ calcula o $VPL = 9728{,}39$ (VPL do investimento associado a γ).

Concluímos daí que o investimento é viável porque tem $TIR > TMA$ e $VPL > 0$.

Como os pagamentos são constantes, também podemos obter a TIR e o VPL acima, utilizando apenas as funções financeiras primárias:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ limpa a memória;

$\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{8}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ registra 48 meses;

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ registra 1000 nos pagamentos mensais;

$\boxed{[\mathbf{i}]}$ calcula a $TIR = 2{,}11\%$ ao mês;

[**0**] [·] [**8**] [**i**] substitui a TIR do investimento pela $TMA = 0{,}8\%$ ao mês;

[**PV**] calcula $-39728{,}39$ (investimento que a 0,8% ao mês rende 1000 por mês);

[**CHS**] inverte o sinal do último resultado para que ele represente $\mathrm{VP}_{(\gamma;\,0{,}8\%)}$;

[**3**] [**0**] [**0**] [**0**] [**0**] [$-$] calcula o VPL do investimento efetuando $39728{,}39 - 30000$.

Façamos a última análise do investimento calculando seu payback descontado (PBD), na hipótese mais comum, que é a da capitalização mista. Os procedimentos estão descritos na subseção 2.4.2. Eles podem ser resumidos nos cálculos de VP_k e de VP_{k-1}, com $\mathrm{VP}_{k-1} < 0 \leq \mathrm{VP}_k$, objetivando encontrar $PBD = (k-1) + p$ de modo que valha a proporção: $(\mathrm{VP}_k - \mathrm{VP}_{k-1})/1 = (S_0 - \mathrm{VP}_{k-1})/p$ (no nosso exemplo, $S_0 = 30000$). Organizamos esta solução em três partes.

Na primeira parte, obtemos k tal que $k - 1 < PBD \leq k$ e verificamos se $PBD = k$ ou $PBD < k$, a partir do cálculo de VP_k. No final desta etapa, salvamos o resultado em uma memória fixa, pois será retomado na terceira parte da solução.

Teclamos:

[**f**] [**CL$\boldsymbol{x}$**] para limpar a memória;

[**0**] [·] [**8**] [**i**] para registrar a taxa de juros de 0,8% ao mês (TMA);

[**3**] [**0**] [**0**] [**0**] [**0**] [**CHS**] [**PV**] para registrar -30000 no valor presente;

[**1**] [**0**] [**0**] [**0**] [**PMT**] para registrar os pagamentos recebidos de 1000;

[**n**] para calcular o prazo de 35 meses (exato ou aproximado por excesso);

[**PV**] para calcular $-30421{,}72$ (valor presente relativo das 35 rendas mensais de 1000);

[**CHS**] para inverter o sinal do último número, obtendo $\mathrm{VP}_{35} \cong 30421{,}72$;

[**STO**] [**1**] para gravar 30421,72 na memória "1".

Na obtenção dos 35 meses acima, existem duas possibilidades: ou são necessários exatamente 35 rendas mensais de 1000 para reembolsar o investimento de 30000 ou o número 35 é uma aproximação por excesso feita automaticamente pela HP12c. Como, em seguida, obtemos o valor presente $-30421{,}72$, concluímos que 35 é o arredondamento do prazo procurado para o primeiro inteiro maior que ele. Se o valor presente fosse -30000 então o PBD seria precisamente 35 meses.

Desta primeira parte, concluímos que o PBD está entre 34 e 35 meses. Se a capitalização ocorresse apenas no final de cada mês, a resposta seria $PBD = 35$ meses. Porém, iremos refinar a aproximação considerando a convenção linear para frações do mês, tendo em vista que supomos inicialmente o uso da capitalização mista.

Na segunda parte, aproveitamos os registros financeiros feitos e mudamos apenas o prazo para 34 meses, a fim de obtermos um novo valor presente relativo e, a partir dele, o VP_{34}. Também finalizamos esta etapa deixando o resultado salvo em um memória fixa. Assim, acionamos:

[3] **[4]** **[n]** para substituir o prazo anterior por 34 meses;

[PV] para calcular $-29665{,}10$ (valor presente relativo das 34 rendas mensais de 1000);

[STO] **[2]** para gravar $-29665{,}10 \cong -\text{VP}_{34}$ na memória "2".

Na terceira parte, refinamos a aproximação do PBD tomando-o igual a $34+p$ tal que $(\text{VP}_{35} - \text{VP}_{34})/1 = (30000 - \text{VP}_{34})/p$, ou seja, $p = (30000 - \text{VP}_{34})/(\text{VP}_{35} - \text{VP}_{34})$. Isto ocorre digitando:

[3] **[0]** **[0]** **[0]** **[0]** **[+]** para calcular $30000 - \text{VP}_{34} \cong 30000 - 29665{,}10 \cong 334{,}90$;

[RCL] **[1]** para chamar $\text{VP}_{35} \cong 30421{,}72$ ao visor;

[RCL] **[2]** para chamar $-\text{VP}_{34} \cong -29665{,}10$ ao visor;

[+] para calcular $\text{VP}_{35} - \text{VP}_{34} \cong 30421{,}72 - 29665{,}10 \cong 756{,}63$;

[÷] para calcular $p \cong (334{,}90)/(756{,}63) \cong 0{,}44$.

Conclusão: $PBD \cong 34{,}44$ meses. Aproximando por excesso, $PBD \cong 34{,}5$ meses.

Numa análise isolada, podemos dizer que o investimento é viável, pois seu PBD é menor que a sua duração de 48 meses. Isto apenas corrobora os resultados anteriores do VPL e da TIR.

Vale ressaltar que, desde o começo da análise do investimento, consideramos conhecida a taxa 0,8% ao mês equivalente a 10% ao ano, mas ela também pode ser obtida na HP12C. Para tal, observemos que 100 à 10% ao ano gera 110 após 1 ano, isto é, que $M(100; 10\%; 1) = 110$. Existe uma taxa mensal i_m equivalente aos 10% anuais que gera o mesmo montante no mesmo prazo dado em meses, isto é, $M(100; i_m; 12) = 110$. Logo, obtemos a referida taxa teclando:

[f] **[CL*x*]** limpa a memória;

[1] **[2]** **[n]** registra o prazo de 12 meses correspondente a 1 ano;

[1] **[0]** **[0]** **[CHS]** **[PV]** registra o valor presente -100;

[1] **[1]** **[0]** **[FV]** registra valor futuro 110;

[i] calcula a taxa mensal $i_m \cong 0{,}80\%$ equivalente a 10% ao ano.

Algebricamente, calculamos $i_m = (1 + 10\%)^{12} - 1 \cong 0{,}8\%$.

Se, em vez de inserirmos a taxa 0,8% ao mês, utilizarmos o último registro da HP12c como TMA, então os resultados serão alterados devido ao erro de aproximação no referido valor 0,8%. Apesar de o visor exibir 0,80, o registro interno da HP12c é muito mais preciso. Teclando [**f**] [**9**], visualizamos nove casas decimais desta taxa: 0,797414043.

A HP12c possui ainda as funções de calendário [DATE] = [**g**] [**CHS**] (determina data futura ou passada a partir de uma data), [ΔDYS] = [**g**] [**EEX**] (calcula quantos dias há entre duas datas), [D.MY] = [**g**] [**4**] (configura datas no formato dia/mês/ano: "modo D.MY" que fica indicado no visor quando acionado), e [M.DY] = [**g**] [**5**] (configura datas no formato mês/dia/ano: "modo M.DY" ou "modo original"). Elas trabalham com datas entre 15 de outubro de 1582 e 25 de novembro de 4046 e podem ser úteis para operações financeiras que levam em conta números exatos de dias, em vez de considerarem o ano comercial de 360 dias, o ano civil de 365 dias ou o ano de 252 dias úteis.

Para utilizar tais funções, é preciso reconfigurar a máquina para exibir seis casas decimais.

Retomemos um exemplo da subseção 2.3.6, no qual mencionamos uma operação iniciada em primeiro de janeiro de 2020 e finalizada em primeiro de janeiro de 2021. Para verificarmos que esta operação durou exatamente 366 dias, devido ao fato de 2020 ter sido um ano bissexto, podemos teclar:

[**f**] [**CLx**] (limpeza de registros);

[**f**] [**6**] (exibição de seis casas decimais no visor);

[**g**] [**4**] (ativação do "modo M.DY");

[**1**] [**·**] [**0**] [**1**] [**2**] [**0**] [**2**] [**0**] [**ENTER**] (registro da data 1/01/2020);

[**3**] [**6**] [**6**] [**g**] [**CHS**] (cálculo da data 1/01/2021, isto é, do 366º dia após 1/01/2020).

A HP12c exibirá no visor "1.01.2021 5", que corresponde à data final da operação 1/01/2021, acrescida do número 5 um pouco mais à direita. Este número indica que o dia da semana correspondente é uma sexta feira, pois a HP12c associa segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado e domingo com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, respectivamente.

Para a máquina calcular os 366 dias que há do dia 1/01/2020 ao dia 1/01/2021, basta repetirmos a última sequência de teclas substituindo [**3**] [**6**] [**6**] [**g**] [**CHS**] por [**1**] [**·**] [**0**] [**1**] [**2**] [**0**] [**2**] [**1**] [**g**] [**EEX**].

A fim de utilizarmos mais algumas funções da HP12c, finalizaremos este estudo apresentando uma situação presente no guia do usuário desta calculadora.

Citamos abaixo o primeiro exemplo do referido manual de uso:

> Suponha que você queira assegurar que será possível pagar a faculdade da sua filha daqui a 14 anos. Você estima que o custo anual será aproximadamente R$ 6000 (R$ 500 por mês) durante 4 anos. Suponha que ela resgatará R$ 500 de uma caderneta de poupança no início de cada mês. Quanto você precisará depositar nessa conta, quando ela começar a faculdade, se a conta pagar 6% ao ano com capitalização mensal? (HP, 2004).

A solução sugerida no guia é a seguinte:

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ (limpa dados da memória);

$\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{12\times}]}$ (calcula e amazena $4.12 = 48$ como número de meses de capitalização);

$\boxed{[\mathbf{6}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{12\div}]}$ (calcula e armazena a taxa de juros mensal $6\%/12 = 0{,}50\%$);

$\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ (armazena 500 no valor do pagamento mensal);

$\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{7}]}$ (ativa o “modo begin”: [BEG]);

$\boxed{[\mathbf{PV}]}$ (calcula o valor que precisa ser depositado: $-21396{,}61$).

Os próximos três exemplos deste manual seguem levantando outras interessantes hipóteses relacionadas com este primeiro supracitado. Por esta e outras razões, como economia de tempo e dinheiro, vale a pena aproveitar este guia didaticamente para uso em sala de aula.

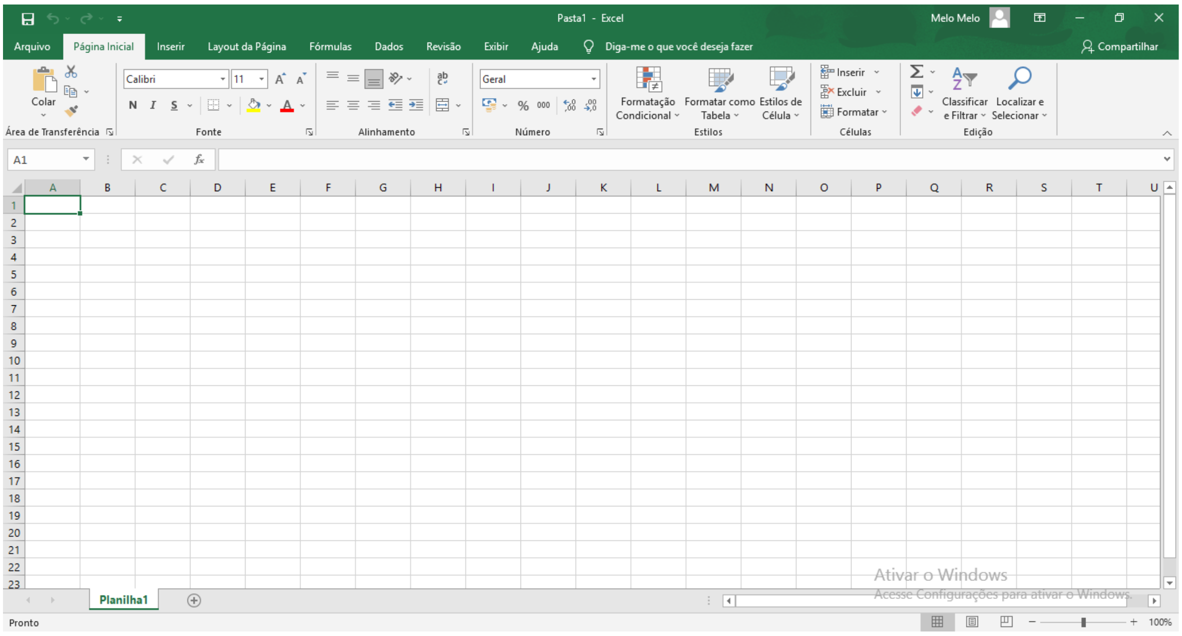
A fim de evitar equívocos no futuro, após os últimos cálculos, teclemos $\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{8}]} =$ [END] para reativar o modo de pagamentos postecipados.

4.2.2 Excel

O Excel é um editor de planilhas eletrônicas que permite desde a realização de operações aritméticas até a criação de tabelas “inteligentes”. Sua primeira versão surgiu em 1985 para o Macintosh OS e, em seguida, foi produzido para o Microsoft Windows. De lá para cá, mais de vinte versões foram criadas, inclusive para dispositivos móveis como Android e iOS e para acesso online gratuito (MICROSOFT, 2021).

Utilizaremos aqui a versão 2109 deste software (MICROSOFT, 2016). Porém, o que for apresentado nesta subseção serve para outras versões do Excel. Todas têm as mesmas ferramentas básicas e a mesma lógica de funcionamento, caracterizada, essencialmente, por uma grade de células retangulares, onde inserimos e armazenamos dados. Assim, diremos apenas Excel para nos referirmos a este programa de computador.

Figura 4.3: Pasta de trabalho em branco do Excel (MICROSOFT, 2016).



Interface e principais características do Excel

Ao abrirmos o Excel, nos deparamos com várias opções, entre as quais a "Pasta de trabalho em branco". Clicando nela, será exibida a interface padrão do programa (figura 4.3), constituída, de cima para baixo, pela "barra de acesso rápido", pelas "guias de ferramentas" ("Arquivo", "Página Inicial", "Inserir", "Layout da Página" , "Fórmulas", etc.), por uma "Faixa de Opções" contendo as ferramentas da guia selecionada, seguida de três janelas ("Caixa de nome", "Cancelar, Inserir, Inserir Função" e "Barra de fórmulas") e, finalmente, pela "área de trabalho" (grade de células mencionada anteriormente).

Cada célula é dada por um par ordenado, cujo primeiro termo é formado por uma, duas ou três letras do nosso alfabeto e o segundo termo é um número natural. As letras indicam a coluna da célula e o número indica sua linha. Temos aqui mais uma oportunidade intradisciplinar, pois o Excel trabalha com um sistema de coordenadas muito parecido com o do plano cartesiano ou de uma matriz.

Quando uma célula for selecionada, diremos que é uma célula ativa. Ao ser ativada, a célula fica contornada em negrito. Por exemplo, na figura 4.3, A1 está ativa e estas coordenadas são exibidas na "Caixa de nome". A ativação da célula pode ocorrer clicando nela, digitando suas coordenadas na "Caixa de nome" ou deslocando o seletor até ela com auxílio das teclas Enter, Tab e setas.

Um interessante exercício de contagem é verificar que, da primeira célula A1 até a última XFD1048576 da versão 2109 do Excel (MICROSOFT, 2016), há 17 179 869 184 células. Afinal, a grade de células corresponde à matriz $\mathcal{M} = (m_{p;q})_{1048576 \times 16384}$.

Para inserir dados em uma célula ativa, basta digitá-los na célula ou na janela "Barra de fórmulas". Esta janela exibe as informações contidas na célula ativa.

O "modo original" do Excel apresenta células congruentes e sem bordas, onde os caracteres são mostrados na fonte Calibre, tamanho 11, alinhados à esquerda, a vírgula separa a parte inteira da não inteira de um número, entre outras configurações de fábrica. Mas a maioria destas características podem ser alteradas com auxílio de ferramentas da guia "Página Inicial".

Utilizaremos a fonte Avant Garde do LaTeX para destacar as informações das células, estejam elas explícitas ou implícitas. Por exemplo, na figura 4.3, como A1 está ativa, para inserirmos Excel16 nesta célula, basta digitarmos estes sete caracteres e pressionarmos Enter. Assim, a célula A1 exibirá Excel16 e, automaticamente, a célula A2 será ativada.

O Excel possui mais de 400 funções que podem ser acessadas pela guia "Fórmulas", pelo ícone f_x ("Inserir Função") ou teclando Shift e F3 simultaneamente. A ferramenta "Financeira" desta guia oferece 55 funções financeiras muito úteis para a MF. Mas menos de dez delas são suficientes para resolver a maioria dos problemas analisados até aqui.

A guia "Arquivo" possui alguns tutoriais explicando o funcionamento básico do Excel, dos quais destacamos o "Bem-vindo ao Excel" e o "Tutorial de fórmula". Muitas das informações apresentadas na próxima subseção foram obtidas de tutorias como estes. Eles podem também ser muito úteis do ponto de vista didático e econômico, pois explicam de modo interativo as principais funções do Excel e minimizam a necessidade de outros materiais.

A seguir utilizaremos algumas destas funções, focando em construir tabelas. Nestas construções, ficará evidente a capacidade do Excel em reconhecer tendências e padrões, entre várias outras, inclusive a de transformar planilhas em gráficos.

Funcionamento básico do Excel

A lógica de funcionamento do Excel é similar à da matemática convencional, o que pode tornar seu uso mais fácil que a HP12c.

Já vimos como ativar e inserir dados em uma célula. A partir daqui, iremos sempre considerar uma célula ativa e vazia antes de ocupá-la com alguma informação.

Vejamos primeiro como fazer cópias e transferências de dados de uma célula para outra. O genérico "método Ctrl C, Ctrl V" consiste em selecionar uma célula, copiá-la teclando simultaneamente Ctrl e C, selecionar a célula de destino e colar os dados copiados pressionando as teclas Ctrl e V juntas. Outro modo é o "método de arrasto" que ocorre selecionando uma célula, clicando na alça que fica no seu canto inferior direito e arrastando vertical ou horizontalmente. Neste caso, o Excel pode identificar padrões aritméticos nos dados copiados e colá-los sistematicamente.

Selecionemos a célula A1, contendo a informação inserida anteriormente (Excel16). Se copiarmos e colarmos em A2 pelo "método Ctrl C, Ctrl V", esta célula mostrará exatamente os mesmos caracteres de A1. Porém, se clicarmos na alça inferior direita de A1 e arrastarmos para A2, esta exibirá Excel17. Se continuarmos arrastando para A3, aparecerá Excel18. Isto ocorre porque o Excel reconhece (16, 17, 18, ...) como uma PA de razão 1. De acordo com Morgado (2005), "o Excel ama Progressões Aritméticas".

Todas as fórmulas no Excel devem ser precedidas do sinal =. Para efetuar somas, diferenças, produtos, quocientes e potências, podemos utilizar, respectivamente, + , - , * , / e ^ (símbolos do Excel). Este software também tem funções específicas para realizar alguns cálculos aritméticos (ferramenta "Matemática e Trigonometria" de "Fórmulas").

Vejamos como construir uma planilha de fluxo de caixa no Excel, como a figura 2.3 da subseção 2.3.7. O primeiro passo é digitar DATA, DESCRIÇÃO, VALOR e SALDO nas células A1, B1, C1 e D1. Em seguida, inserimos as datas das 19 movimentações financeiras na coluna A, suas descrições na coluna B e seus valores relativos na coluna C. Depois digitamos =C2 em D2 para que o valor do saldo anterior seja o mesmo desta célula. Formulamos então =D2 + C3 em D3, clicamos no canto inferior direito desta célula e arrastamos até D20. Assim, a fórmula é copiada sistematicamente, automatizando a soma do saldo anterior com a última entrada ou saída de dinheiro. O Excel interpreta os números das linhas das células adicionadas como progressões aritméticas de razão 1, levando =D3 + C4 para D4, =D4 + C5 para D5, =D5 + C6 para D6, assim sucessivamente.

Para finalizar a construção, falta redimensionar células, acrescentar bordas e colocar os valores monetários em reais. Para isto, selecionamos toda a planilha, alteramos a "Largura da coluna" para 15 (item da ferramenta "Formatar") e substituímos a opção "Sem borda" por "Todas as bordas". Depois, selecionamos de C2 a D20 e clicamos em "Formato de Número de Contabilização" (ícone da ferramenta "Número").

Os três ajustes do último parágrafo são apenas os mais utilizados. Eles fazem parte da "Página Inicial". Esta mesma guia contém vários outros recursos para reformatar células. Por exemplo, podemos contornar uma célula com linhas mais espessas, colorir seu interior, grafar caracteres em negrito e centralizados etc.

No exemplo anterior, podemos inserir =SOMA(C2:C20) em uma célula vazia para calcular a soma de todas as receitas e despesas (da célula C2 até a C20). O resultado coincide com o último saldo presente na célula D20.

Calculemos agora o saldo após 3 meses da aplicação de 100 reais à 10% ao mês, no regime de juros compostos. Devido ao **T-2.1**, podemos inserir =100*(1 + 10%)^3 em uma célula vazia e teclar Enter. Esta célula exibirá o resultado 133,1.

Entre as funções financeiras do Excel, destacaremos as que correspondem as funções $\boxed{\textbf{FV}}$, $\boxed{\textbf{PV}}$, $\boxed{\textbf{n}}$, $\boxed{\textbf{i}}$ e $\boxed{\textbf{PMT}}$ da calculadora HP12c.

Estas funções do Excel são dadas por fórmulas, estruturadas nos seguintes formatos:

=VF(taxa; nper; pgto; vp; tipo) (função "VF": valor futuro);

=VP(taxa; nper; pgto; vf; tipo) (função "VP": valor presente);

=NPER(taxa; pgto; vp; vf; tipo) (função "NPER": número de períodos);

=TAXA(nper; pgto; vp; vf; tipo) (função "TAXA": taxa efetiva de juros);

=PGTO(taxa; nper; vp; vf; tipo) (função "PGTO": valor do pagamento periódico).

Após inserirmos as fórmulas acima corretamente no Excel, pressionamos Enter para que calculem os respectivos valores. A primeira observação neste contexto é que o Excel utiliza uma convenção de sinais para valores monetários semelhante à HP12c.

Cada uma destas sentenças tem cinco parâmetros, porém basta informar três deles. Por exemplo, "VF" calcula o valor futuro a partir da taxa, do nper e do pgto ou a partir da taxa, do nper e do vp.

O valor que for omitido na fórmula de uma função do Excel é considerado nulo.

O último parâmetro nas fórmulas anteriores é tipo. Ele corresponde ao vencimento do pagamento, que pode ser postecipado ou antecipado. O primeiro caso é indicado pelo número 0, ou seja, basta omití-lo para o Excel adotar a postecipação de pagamentos. Na antecipação de pagamentos, devemos inserir 1 no tipo.

Observemos que os tipos 0 e 1 do Excel correspondem, respectivamente, ao "modo end" a ao "modo begin" da HP12c.

Podemos chegar ao mesmo valor resultante da fórmula =100*(1 + 10%)^3 por meio de =VF(10%; 3; ; -100). Este cálculo do Excel corresponde ao montante $M(100; 10\%; 3)$ da aplicação de R$ 100, à 10% ao ano, após 3 anos.

Como utilizamos desta vez uma função financeira, o Excel retorna R$ 133,10, já com a notação em reais.

Ressaltamos que o sinal negativo foi atribuído ao 100 para indicar uma despesa. Se omitíssemos este sinal, o Excel retornaria -R$ 133,10. Neste caso, os 100 reais seriam uma quantia tomada emprestada e o resultado seria o desembolso para quitar a dívida.

O símbolo R$, a aproximação com duas casas decimais, o sinal negativo e a cor vermelha para todo valor com este sinal são aspectos estabelecidos automaticamente pelo Excel, devido à função financeira utilizada. Isto pode ser modificado com a ferramenta "Formatar células", acessível, por exemplo, pelo botão direito do mouse.

Note ainda que omitimos o pgto na última fórmula porque não existem pagamentos periódicos na situação analisada.

Vejamos também como calcular o valor presente, o número de anos e a taxa de juro anual a partir do conhecimento das outras variáveis.

A fórmula =VP(10%; 3; ; 133,10) calcula o valor presente $-$R$ 100 a partir da taxa anual de 10%, do prazo de 3 anos e do valor futuro R$ 133,10.

A fórmula =NPER(10%; ; -100; 133,10) calcula o prazo de 3 anos a partir da taxa anual de 10%, do valor presente $-$R$ 100 e do valor futuro R$ 133,10.

A fórmula =TAXA(3; ; -100; 133,10) calcula a taxa de 10% ao ano a partir do prazo de 3 anos, do valor presente $-$R$ 100 e do valor futuro R$ 133,10.

Retomemos a tabela da figura 2.4 (subseção 2.4.1), que retrata a evolução de 100 reais, a 10% ao ano, no regime de juros compostos e no regime de juros simples. A figura 2.4 exibe apenas os montantes até o terceiro ano. Mostraremos como construí-la no Excel com montantes até 14 anos (ou mais), de duas maneiras. Em ambas, começamos inserindo Ano, JC (para denotar montantes anuais a juros compostos), JS (para denotar montantes anuais a juros simples) e o número 0 nas células A1, B1, C1 e A2, respectivamente.

No primeiro modo, inserimos 1 em A3 e 100 em B2 e C2. Depois formulamos =B2*1,1 em B3 e =C2 + 10 em C3. Para recriarmos a tabela da Figura 2.4, obtendo montantes por recorrência (do mesmo modo que fizemos naquela ocasião), selecionamos A3, B3 e C3, clicamos no canto inferior direito da seleção e arrastamos até a linha 5. O Excel copiará sistematicamente e fornecerá os resultados para cada ano. A extensão da tabela com montantes até o 14º ano é feita continuando o arrasto até a linha 16.

Nesta transferência de dados pelo método de arrasto, Excel interpreta os valores das células A3, A4, A5, ..., A16 como uma PA de razão 1, iniciada pelo 1 inserido em A3. Com a mesma lógica, o Excel faz variar o caractere 2 indicativo da linha em =B2*1,1 e em =C2 + 10.

O Excel retornará valores com quantidades variadas de casas decimais, mas isto pode ser reconfigurado pelo já mencionado "Formato de Número de Contabilização".

No segundo modo, iremos refazer essa tabela ampliando a sua aplicabilidade. Para tal, fixaremos duas células para inserção do capital inicial e da taxa de juro anual e modificaremos as fórmulas, conforme o próximo parágrafo.

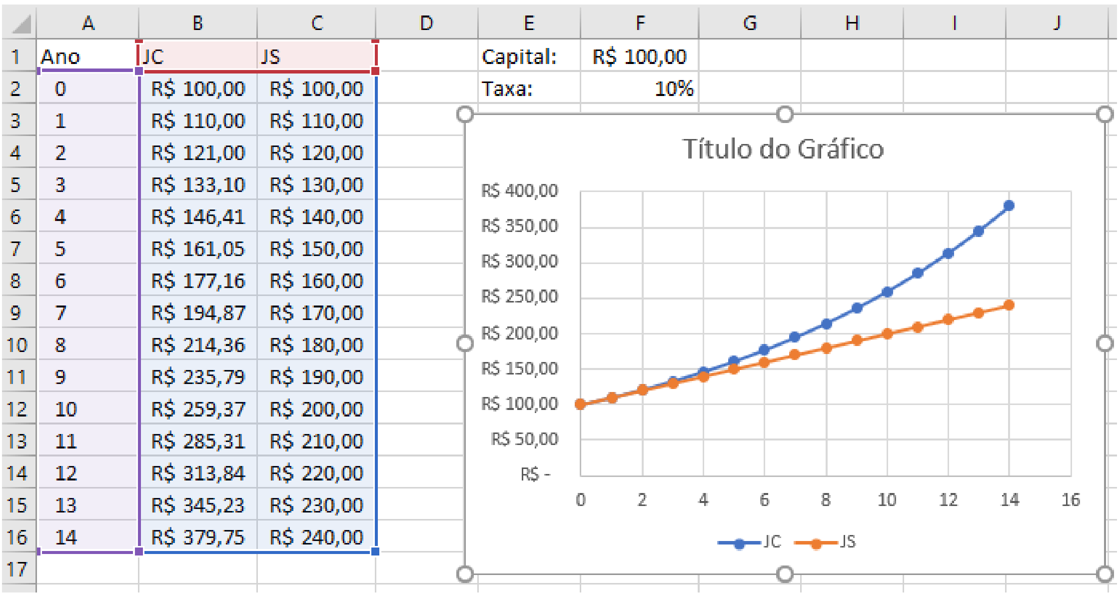
Sejam F1 e F2 as células onde serão inseridos o capital e a taxa. Indicaremos isto, digitando Capital: em E1 e Taxa: em E2. Inserimos então =$F$1*(1 + $F$2)^A2 em B2 e =$F$1*(1 + $F$2*A2) em C2 (acrescentamos $ para fixar coluna e linha). Depois, basta copiar A2, B2 e C2 para as dez linhas seguintes, selecionando estas três células, clicando no canto inferior direito da seleção e arrastando para baixo até a linha 12.

Como F1 e F2 estão vazias, o Excel não exibirá montantes. Podemos obter qualquer sequência de 10 montantes a partir do capital e da taxa que inserirmos nestas células. Para obtermos a mesma a tabela anterior, basta registrarmos 100 em F1 e 10% em F2.

O Excel dispõe de recursos que permitem converter imediatamente uma tabela como a que acabamos de construir na sua representação gráfica. Para obter os subconjuntos da curva exponencial $M(n) = 100.(1 + 10\%)^n$ e da reta $M_s(n) = 100.(1 + 10\%.n)$, onde n é um prazo não negativo, que representam graficamente a evolução de R\$ 100 à 10% ao ano, nos dois regimes de capitalização, basta selecionar a tabela anterior (de A1 até C12) e clicar na opção "Dispersão com linhas suaves e marcadores" pertencente à ferramenta "Inserir Gráfico de Dispersão (X, Y) ou de Bolha" do grupo "Gráficos", na guia "Inserir".

A figura 4.4 mostra a planilha, cuja construção foi anteriormente descrita, e o seu gráfico obtido conforme o últmo parágrafo.

Figura 4.4: Evolução de 100 reais à 10% ao ano em juros compostos e simples, no Excel.



	A	B	C	D	E	F
1	Ano	JC	JS		Capital:	R$ 100,00
2	0	R$ 100,00	R$ 100,00		Taxa:	10%
3	1	R$ 110,00	R$ 110,00			
4	2	R$ 121,00	R$ 120,00			
5	3	R$ 133,10	R$ 130,00			
6	4	R$ 146,41	R$ 140,00			
7	5	R$ 161,05	R$ 150,00			
8	6	R$ 177,16	R$ 160,00			
9	7	R$ 194,87	R$ 170,00			
10	8	R$ 214,36	R$ 180,00			
11	9	R$ 235,79	R$ 190,00			
12	10	R$ 259,37	R$ 200,00			
13	11	R$ 285,31	R$ 210,00			
14	12	R$ 313,84	R$ 220,00			
15	13	R$ 345,23	R$ 230,00			
16	14	R$ 379,75	R$ 240,00			
17						

Observamos que o Excel, assim como a HP12c, opera internamente com uma precisão muito maior do que a das duas casas decimais exibidas. Logo, alguns resultados que obtemos sem utilizar tais recursos podem ser um pouco diferentes dos que aparecem neste capítulo. Por exemplo, sabe-se que $M(100; 10\%; 12).(1{,}1) = M(100; 10\%; 13)$, isto é, inserindo `=B14*(1,1)` numa célula vazia, obtém-se o valor da célula B15; entretanto, $(313{,}84).(1{,}1) = 345{,}224 \cong 345{,}22$ e este valor difere dos 345,23 mostrados na planilha acima.

Isto também será evidenciado a seguir, por meio da figura 4.6, que elimina um erro de aproximação ocorrido na construção da figura 3.9.

As duas próximas planilhas se referem ao empréstimo de R\$ 30000,00, à taxa de juro de 10% ao ano, pago em 4 anuidades, no SAC (figura 4.4) e no SFA (figura 4.5). Elas são reproduções no Excel das tabelas apresentadas nas figuras 3.8 e 3.9 do capítulo 3.

Figura 4.5: Planilha Excel correspondente à figura 3.8: Exemplo de Tabela SAC.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Dados iniciais:**	i =	10%	n =	4	S_0 =	R$ 30.000,00
2							
3	**Tabela SAC**		**k**	**S_k**	**A_k**	**J_k**	**P_k**
4			0	R$ 30.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
5	Sistema de		1	R$ 22.500,00	R$ 7.500,00	R$ 3.000,00	R$ 10.500,00
6	Amortizações		2	R$ 15.000,00	R$ 7.500,00	R$ 2.250,00	R$ 9.750,00
7	Constantes		3	R$ 7.500,00	R$ 7.500,00	R$ 1.500,00	R$ 9.000,00
8			4	R$ -	R$ 7.500,00	R$ 750,00	R$ 8.250,00

Figura 4.6: Planilha Excel correspondente à figura 3.9: Exemplo de Tabela SFA.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Dados iniciais:**	i =	10%	n =	4	S_0 =	R$ 30.000,00
2							
3	**Tabela SFA**		**k**	**S_k**	**A_k**	**J_k**	**P_k**
4			0	R$ 30.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
5	Sistema		1	R$ 23.535,88	R$ 6.464,12	R$ 3.000,00	R$ 9.464,12
6	Francês de		2	R$ 16.425,34	R$ 7.110,54	R$ 2.353,59	R$ 9.464,12
7	Amortizações		3	R$ 8.603,75	R$ 7.821,59	R$ 1.642,53	R$ 9.464,12
8			4	R$ -	R$ 8.603,75	R$ 860,37	R$ 9.464,12

Descreveremos a seguir como estas planilhas foram construídas.

Em ambas, começamos alargando as colunas para 13 e escrevendo **Dados iniciais:** em A1, **i =** em B1, 10% em C1, **n =** em D1, 4 em E1, **S_0 =** em F1, 30000 em G1. Afim de evitar problemas com falta de espaço, redimensionamos da coluna A até a G para 13, pela opção "Largura da Coluna" acessada pelo botão direito do mouse após feita a seleção das colunas. Em seguida, intitulamos a planilha em A3, A5, A6 e A7 e inserimos **k** em C3, **S_k** em D3, **A_k** em E3, **J_k** em F3 e **P_k** em G3. Para finalizar esta parte comum, registramos 0 em C4, E4, F4 e G4, 1 em C5 e formulamos =G1 em D4, =$D4 - $E5 em D5 e =$C$1*$D4 em F5.

O que distingue a Tabela SAC (figura 4.5) da Tabela SFA (figura 4.6) são as formulações das células E5 e G5. Na primeira, inserimos =$G$1/$E$1 em E5 e =$E5 + $F5 em G5. Na segunda, inserimos =$G5 - $F5 em E5 e =-PGTO($C$1; $E$1; $G$1) em G5.

Daí, em cada planilha, replicamos C5, D5, E5, F5 e G5 pelo "método de arrasto" para as células abaixo, nas linhas 2, 3 e 4.

Utilizamos novamente "Formato de número de contabilização" em G1 e de D4 até G8. Além disto, aumentamos e negritamos algumas fontes, realinhamos textos e espessamos alguns contornos por meio da opção “Borda” em “Formatar células”. Estas e outras ferramentas estéticas fazem parte da guia “Página Inicial”.

As duas últimas planilhas, podem servir de modelo para a obtenção de quaisquer outras tabelas SAC e SFA. Para tal, basta alterar os dados iniciais na linha 1. Caso o número de pagamentos seja $n \neq 4$, em vez de replicarmos C5, D5, E5, F5 e G5 até a linha 4, utilizamos o mesmo método de arrasto para copiar e colar as fórmulas destas cinco células até a linha n.

Retomemos agora o exemplo 3.5, no qual é realizado um empréstimo de 30000 reais à 0,8% ao mês, para investir em um projeto que rende 1000 reais por mês durante 48 meses. Nosso objetivo é utilizar o Excel para calcular a TIR, o VPL e o PBD deste investimento e refazer no Excel a representação tabular deste fluxo de caixa, que esboçamos anteriormente na figura 3.11.

Como, em particular, temos uma sequência de pagamentos constantes, então podemos calcular TIR e VPL do investimento sem a sua planilha de fluxo de caixa. As fórmulas =TAXA(48; 1000; -30000) e =-VP(0,8%; 48; 1000) - 30000 calculam a $TIR \cong$ 2,11% ao mês e o $VPL \cong$ R$ 9728,39, respectivamente.

Na convenção exponencial da capitalização composta, o $PBD \cong 34,44$ meses é calculado imediatamente por =NPER(0,8%; 1000; -30000).

Se os pagamentos não fossem constantes, não seria possível calcular TIR, VPL nem PBD utilizando as funções anteriores. Neste caso, a planilha Excel seria imprescindível.

Para construir esta planilha, inserimos **k**, **FC$_{\mathbf{k}}$**, **VP(FC$_{\mathbf{k}}$; 0,8%)**, **k**, **VPL$_{\mathbf{k}}$** de A1 até D1, nesta ordem. Seguimos inserindo 0 em A2, -30000 em B2, C2 e D2, 1 em A3, 2 em A4, 1000 em B3 e B4. Depois formulamos =B3/(1 + 0,8%)^A3 em C3, =D2 + C3 em D3, =B4/(1 + 0,8%)^A4 em C4 e =D3 + C4 em D4. Finalmente, selecionamos as linhas 3 e 4 e arrastamos até a linha 50.

Após isto, aplicamos outra vez “Formato de número de contabilização” e deixamos alguns contornos mais espessos. O resultado está na figura 4.7.

As fórmulas que calculam a TIR e o VPL são =TIR(B2:B50) e =VPL(0,8%; B3:B50) - 30000. Na primeira, B2:B50 é a seleção da célula B2 até a B50, ou seja, todos os fluxos de caixa. Na segunda, B3:B50 exclui apenas o fluxo de caixa inicial da selção anterior.

Na planilha, o PBD é facilmente identificado entre o 34º e o 35º mês. Considerando a capitalização mista, calculamos o $PBD \cong$ 34,44 pela fórmula =34 - D36/C37.

Figura 4.7: Planilha Excel do fluxo de caixa do investimento do exemplo 3.5.

	A	B	C	D
1	**k**	**FC_k**	**$VP(FC_k; 0{,}8\%)$**	**VPL_k**
2	0	-R$ 30.000,00	-R$ 30.000,00	-R$ 30.000,00
3	1	R$ 1.000,00	R$ 992,06	-R$ 29.007,94
4	2	R$ 1.000,00	R$ 984,19	-R$ 28.023,75
5	3	R$ 1.000,00	R$ 976,38	-R$ 27.047,37
6	4	R$ 1.000,00	R$ 968,63	-R$ 26.078,74
7	5	R$ 1.000,00	R$ 960,94	-R$ 25.117,80
8	6	R$ 1.000,00	R$ 953,32	-R$ 24.164,48
9	7	R$ 1.000,00	R$ 945,75	-R$ 23.218,73
10	8	R$ 1.000,00	R$ 938,24	-R$ 22.280,49
11	9	R$ 1.000,00	R$ 930,80	-R$ 21.349,69
12	10	R$ 1.000,00	R$ 923,41	-R$ 20.426,28
13	11	R$ 1.000,00	R$ 916,08	-R$ 19.510,20
14	12	R$ 1.000,00	R$ 908,81	-R$ 18.601,39
15	13	R$ 1.000,00	R$ 901,60	-R$ 17.699,79
16	14	R$ 1.000,00	R$ 894,44	-R$ 16.805,34
17	15	R$ 1.000,00	R$ 887,34	-R$ 15.918,00
18	16	R$ 1.000,00	R$ 880,30	-R$ 15.037,70
19	17	R$ 1.000,00	R$ 873,32	-R$ 14.164,38
20	18	R$ 1.000,00	R$ 866,38	-R$ 13.298,00
21	19	R$ 1.000,00	R$ 859,51	-R$ 12.438,49
22	20	R$ 1.000,00	R$ 852,69	-R$ 11.585,81
23	21	R$ 1.000,00	R$ 845,92	-R$ 10.739,89
24	22	R$ 1.000,00	R$ 839,21	-R$ 9.900,68
25	23	R$ 1.000,00	R$ 832,55	-R$ 9.068,14
26	24	R$ 1.000,00	R$ 825,94	-R$ 8.242,20
27	25	R$ 1.000,00	R$ 819,38	-R$ 7.422,82
28	26	R$ 1.000,00	R$ 812,88	-R$ 6.609,94
29	27	R$ 1.000,00	R$ 806,43	-R$ 5.803,51
30	28	R$ 1.000,00	R$ 800,03	-R$ 5.003,48
31	29	R$ 1.000,00	R$ 793,68	-R$ 4.209,80
32	30	R$ 1.000,00	R$ 787,38	-R$ 3.422,42
33	31	R$ 1.000,00	R$ 781,13	-R$ 2.641,29
34	32	R$ 1.000,00	R$ 774,93	-R$ 1.866,36
35	33	R$ 1.000,00	R$ 768,78	-R$ 1.097,58
36	34	R$ 1.000,00	R$ 762,68	-R$ 334,90
37	35	R$ 1.000,00	R$ 756,63	R$ 421,72
38	36	R$ 1.000,00	R$ 750,62	R$ 1.172,35
39	37	R$ 1.000,00	R$ 744,66	R$ 1.917,01
40	38	R$ 1.000,00	R$ 738,75	R$ 2.655,76
41	39	R$ 1.000,00	R$ 732,89	R$ 3.388,65
42	40	R$ 1.000,00	R$ 727,07	R$ 4.115,73
43	41	R$ 1.000,00	R$ 721,30	R$ 4.837,03
44	42	R$ 1.000,00	R$ 715,58	R$ 5.552,61
45	43	R$ 1.000,00	R$ 709,90	R$ 6.262,51
46	44	R$ 1.000,00	R$ 704,27	R$ 6.966,78
47	45	R$ 1.000,00	R$ 698,68	R$ 7.665,45
48	46	R$ 1.000,00	R$ 693,13	R$ 8.358,59
49	47	R$ 1.000,00	R$ 687,63	R$ 9.046,22
50	48	R$ 1.000,00	R$ 682,17	R$ 9.728,39

4.3 Outros recursos tecnológicos para a MF

A HP12c e o Excel são os recursos tecnológicos mais utilizados por profissionais que lidam diariamente com a MF, como contadores, economistas, investidores, atuários, banqueiros e gestores financeiros em geral, mas existem muitos outros. Como exemplos de calculadoras financeiras, além da HP12c e seus simuladores online citados anteriormente, podemos mencionar a Fc-100v e Fc-200v da CASIO, a FN 12000C da Procalc e a EL-738FB da Sharp. Entre as planilhas eletrônicas análogas ao Excel, destacamos algumas gratuitas, como o programa Calc do BrOffice e o programa Gnumeric do projeto GNOME.

A fim de auxiliar o professor em um curso de MF, recomendamos também recursos audiovisuais disponíveis gratuitamente na internet. Entre eles, vídeos do IMPA previamente citados, como o do professor Morgado (PAPMEM, 2015), alguns da disciplina "Matemática Discreta" do PROFMAT (CARVALHO, [201-]) e um material da OBMEP (CARVALHO, [20--]). Além destes, sugerimos vídeos da TV Escola como "Matemática em toda parte: matemática nas finanças" (MATEMÁTICA, 2009), da coleção "Matemática Multimídia" que tratam de MF (UNICAMP, 2021) e os vídeos de MF da disciplina "Modelagem de Risco em Finanças e Atuária" da USP - "Aula 1" até "Aula 10" (ARAÚJO, 2012).

As duas primeiras referências do parágrafo acima são mais indicadas para o professor preparar suas aulas de MF, podendo, porém, ter partes exibidas em turmas de Ensino Médio. As outras constituem vídeos próprios para exibição em sala de aula neste nível de ensino.

Capítulo 5

Atividades

A BNCC estabelece que, no Ensino Médio, a área de "Matemática e suas Tecnologias" deve aproveitar os conhecimentos construídos no Ensino Fundamental, a fim de ampliá-los e aprofundá-los.

> Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018).

Recomenda-se, portanto, que toda formalização de conceitos seja contextualizada por atividades motivadoras. Este capítulo será dedicado a elas. Apresentaremos nele algumas alternativas didáticas para a abordagem da MF no Ensino Médio, por meio de atividades cuidadosamente elaboradas a partir do que foi visto nos capítulos anteriores.

Nosso objetivo aqui é buscar o desenvolvimento das habilidades estabelecidas pela BNCC, que enunciamos na introdução deste trabalho, e outras habilidades como resolver problemas aplicando conhecimentos sobre capitalização mista, viabilidade de operações financeiras e sistemas de amortizações.

Distribuímos as atividades em seções e suas soluções nas respectivas subseções. Apresentamos diferentes possibilidades resolutivas (aritméticas, algébricas e tecnológicas), de modo que a mesma atividade possa ser trabalhada em variados contextos.

Com algumas adaptações, as atividades podem ser desenvolvidas individualmente ou em grupo, presencialmente ou à distância, em uma ou em mais aulas.

5.1 Primeira atividade: A.1

A linguagem técnica da MF não consta no enunciado abaixo, porque esta primeira atividade foi pensada para introduzir e motivar o estudo da MF. Entretanto, recomendamos que ela seja retomada, conforme os conhecimentos da MF forem sendo trabalhados. Nas soluções desta atividade, veremos que ela abrange quase todos os assuntos da MF.

5.1.1 Enunciado da primeira atividade

A.1 Uma coleção de livros que custa R$ 300,00, pode ser paga de dois modos:

Opção I: À vista com 10% de desconto.

Opção II: A prazo, em três prestações mensais de R$ 100,00, sem entrada.

Supondo que você necessite adquirir estes livros urgentemente e disponha de mil reais numa aplicação financeira que rende 1% ao mês, qual das duas opções de pagamento lhe é, financeiramente, mais vantajosa?

5.1.2 Soluções da primeira atividade

A princípio, esta atividade será resolvida no contexto introdutório da MF, utilizando apenas conhecimentos básicos de matemática e a ideia essencial da MF que atrela o valor do dinheiro ao tempo. Posteriormente, serão apresentadas alternativas para agilizar a resolução do problema, aplicando conceitos e resultados da MF pertinentes ao capítulo 2.

Também mostraremos soluções com a HP12c e o Excel e aproveitaremos para conectar esta atividade com assuntos trabalhados no capítulo 3.

Antes de tudo é preciso observar o equívoco que seria considerar a opção I mais vantajosa que a II pelo simples fato de termos R$ 270,00 < R$ 300,00. Esta comparação infringe os "mandamentos" da MF citados na seção 2.2.

1ª solução para A.1

Nesta solução inicial, iremos comparar os saldos decorrentes das duas opções de pagamento. O objetivo é explorar a essência da MF, em meio à revisão de pré-requisitos.

A recorrência para a obtenção destes saldos está detalhada na tabela a seguir (figura 5.1), cuja primeira coluna contém números de meses completos, na segunda estão os saldos em reais decorrentes da opção I e na terceira, os saldos decorrentes da opção II.

Figura 5.1: Tabela comparativa das duas opções de pagamento na atividade **A.1**.

Mês	Saldo na Opção I	Saldo na Opção II
0	1000 − [300 − (10%).300] = 730,00	1000,00
1	730,00 + (1%).730,00 = 737,30	1000,00 + (1%).1000,00 − 100,00 = 910,00
2	737,30 + (1%).737,30 = 744,67	910,00 + (1%).910,00 − 100,00 = 819,10
3	744,67 + (1%).744,67 = 752,12	819,10 + (1%).819,10 − 100,00 = 727,29

Desta tabela, conclui-se imediatamente que a opção I é mais vantajosa porque acarreta saldo final maior que o da opção II.

As expressões aritméticas da figura 5.1 evidenciam cálculos que podem ser efetuados mentalmente, a partir de conhecimentos elementares como 1% = 1/100 e 10% = 1/10. Por exemplo, é fácil mentalizar 730,00 + (1%).730,00 = 730,00 + 7,30 = 737,30.

Podemos simplificar 730,00 + (1%).730,00 = 730.(1,01), o que pode dificultar cálculos mentais, mas facilita cálculos eletrônicos. Além disto, as expressões reduzidas são importantes para outras análises, como as que faremos na 2ª solução.

Os resultados mostrados na figura 5.1 podem ser obtidos numa planilha do Excel. Para tal, inserimos os cabeçalhos da primeira linha desta figura nas células A1, B1 e C1, fixamos 0 em A2, =1000 - (300 - 10%*300) em B2, 1000 em C2 e 1 em A3, formulamos =B2*1,01 em B3 e =C2*1,01 - 100 em C3 e arrastamos a linha 3 para as linhas 4 e 5. Inicialmente, o Excel exibirá os resultados como na figura 5.2.

Figura 5.2: Tabela 5.1 refeita no Excel.

	A	B	C
1	**Mês**	**Saldo na Opção I**	**Saldo na Opção II**
2	0	730	1000
3	1	737,3	910
4	2	744,673	819,1
5	3	752,11973	727,291

Conforme vimos no Capítulo 4, podemos colocar os valores monetários da planilha acima com “R$” e aproximados com duas casas decimais utilizando a função “Formato de Número de Contabilização”. Mas preferimos não aproximar para mostrar os valores exatos calculados no Excel.

No contexto da capitalização composta, as fórmulas =B2*1,01 e =C2*1,01 - 100 podem ser substituídas por =VF(1%; A3; ; -730) e =VF(1%; 1; ; -C2) - 100, respectivamente. Os mesmos resultados também podem ser calculados na HP12c, mas deixaremos para trabalhar com ela na próxima solução.

$2^{\underline{a}}$ solução para <u>A.1</u>

Nesta solução, usaremos a ideia básica da MF de deslocar valores monetários no tempo, com auxílio de diagramas de fluxo de caixa e conhecimentos sobre PG. O principal objetivo é buscar o caminho mais rápido para resolver a questão, sem fazer uso da recorrência que vimos na $1^{\underline{a}}$ solução.

Primeiramente, notemos que uma quantia q à 1% ao mês torna-se $q + (1\%).q$ no mês seguinte, isto é, $q.(1{,}01)$. Daí, concluímos que (1,01) é o *fator de capitalização* que permite deslocar q para 1 mês no futuro. Assim, C vale $C.(1{,}01)$ no mês seguinte; $C.(1{,}01)$ vale $C.(1{,}01).(1{,}01)$ no mês seguinte; $C.(1{,}01).(1{,}01)$ vale $C.(1{,}01).(1{,}01).(1{,}01)$ no mês seguinte. Logo, C vale $C.(1{,}01)^n$ após n meses - ao menos para $n \in \{1; 2; 3\}$.

Temos aí a ideia embrionária do conceito de juros compostos, formalizado no Capítulo 2. Porém, nesta $2^{\underline{a}}$ solução de **<u>A.1</u>**, não empregaremos explicitamente a fórmula $M(n) = C.(1 + i)^n$ do **T-2.1**. A intenção aqui é introduzir o raciocínio que leva a ela.

Esbocemos os diagramas de fluxo de caixa referentes às duas opções de pagamento.

Figura 5.3: Fluxo de caixa da opção I: pagamento único de R$ 270,00 à vista.

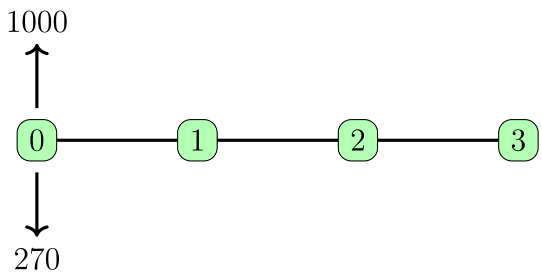
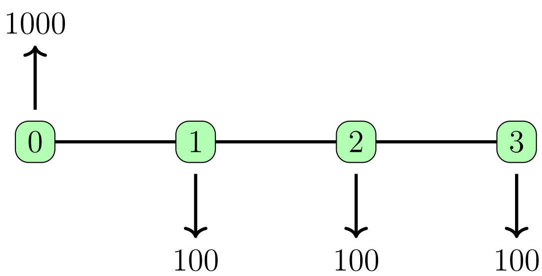


Figura 5.4: Fluxo de caixa da opção II: 3 prestações postecipadas de R$ 100,00.



Deslocando as despesas para o terceiro mês em cada opção de pagamento, temos:

(I) $270.(1,01)^3 = 278,18$ (despesa da opção I no $3^{\underline{o}}$ mês);

(II) $100.(1,01)^2 + 100.(1,01) + 100 = 303,01$ (despesa da opção II no $3^{\underline{o}}$ mês).

Fizemos as contas com valores monetários absolutos, mas sabemos que eles representam saídas de caixa. Logo, o menor gasto ocorre na opção I, que é, portanto, mais vantajosa que a opção II.

Para obtermos as despesas anteriores pela HP12c, basta teclarmos as seguintes sequências:

(I) $\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ (limpa registros anteriores);

$\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ (registra o prazo de 3 meses);

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ (registra a taxa de 1% ao mês);

$\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{7}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ (registra o valor presente 270);

$\boxed{[\mathbf{FV}]}$ (calcula o valor futuro de 270 após 3 meses: −278,18).

(II) $\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}\boldsymbol{x}]}$ (limpa registros anteriores);

$\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ (registra o prazo de 3 meses);

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ (registra a taxa de 1% ao mês);

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ (registra o valor 100 dos pagamentos mensais);

$\boxed{[\mathbf{FV}]}$ (calcula o valor futuro dos 3 pagamentos postecipados no 3º mês: −303,01).

Podemos obter os mesmos resultados no Excel, utilizando a função "VF":

(I) =VF(1%; 3; ; 270) (resultado: −R$ 278,18);

(II) =VF(1%; 3; 100) (resultado: −R$ 303,01).

Como era de se esperar, a HP12c e o Excel retornam automaticamente valores negativos porque entramos com valores positivos. Explicamos no Capítulo 4 como funciona a convenção de sinais destes recursos tecnológicos.

Vale ressaltar que, conforme explicamos no Capítulo 4, os registros da HP12c não apagam automaticamente. Então, todos os últimos dados inseridos na máquina permanecem nela (inclusive se a desligarmos e religarmos). Logo, para obtermos −303,01 após calcularmos −270,18 na solução anterior, poderíamos não apagar a memória, substituir o valor presente por 0, registrar 100 no valor dos pagamentos e calcular o valor futuro, ou seja, teclamos $\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ $\boxed{[\mathbf{FV}]}$.

Interessante notar que R$ 1000,00 na aplicação rendendo 1% ao mês seriam transformados, após 3 meses, em $1000.(1,01)^3 \cong 1030,30$. Daí, encontramos os mesmos saldos que tínhamos achado na 2ª solução: $S_{\mathrm{I}}(3) = 1030,30 - 278,18 = 752,12$ (saldo do 3º mês na opção I) e $S_{\mathrm{II}}(3) = 1030,30 - 303,01 = 727,29$ (saldo do 3º mês na opção II).

Para obter $S_{\mathrm{I}}(3) = 752,12$ na HP12c, basta substituir o valor presente por 730, pois o saldo do 3º mês é o valor futuro de $1000 - 270 = 730$, e, obviamente, os pagamentos por 0. Isto é feito teclando [7] [3] [0] [PV] [0] [PMT] [FV].

Daí, teclamos [1] [0] [0] [0] [CHS] [PV] [1] [0] [0] [PMT] [FV] para obter $S_{\mathrm{II}}(3) = 727,29$.

No Excel, obtemos $S_{\mathrm{I}}(3) = 752,12$ com a fórmula =VF(1%; 3; ; 730), e obtemos $S_{\mathrm{II}}(3) = 727,29$ com a fórmula =VF(1%; 3; 100; -1000).

3ª solução para A.1

Esta 3ª solução é apenas uma variação da 2ª. Em vez de levarmos valores para o futuro (mês 3) com o *fator de capitalização* mensal (1,01), os deslocaremos para o presente (mês 0) com o *fator de descapitalização* mensal 1/(1,01). Observando novamente as figuras 5.3 e 5.4, temos os seguintes valores presentes das despesas:

(I) $\mathrm{VP}_{\mathrm{I}} = 270$ (valor presente da despesa na opção I, pois 270 já está no mês 0);

(II) $\mathrm{VP}_{\mathrm{II}} = 100/(1,01) + 100/(1,01)^2 + 100/(1,01)^3 \cong 294,10$ (valor presente das 3 despesas de 100 na opção II).

Daí, concluímos que a opção I é mais vantajosa porque acarreta a menor despesa.

Para calcularmos −294,10 na HP12c, basta teclarmos:

[f] [CLx] [3] [n] [1] [i] [1] [0] [0] [PMT] [PV].

No Excel, obtemos o mesmo resultado pela fórmula =VP(1%; 3; 100).

Notemos ainda que:

(I) $S_{\mathrm{I}}(0) = 1000 - \mathrm{VP}_{\mathrm{I}} = 730$ (saldo da opção I no mês 0);

(II) $S_{\mathrm{II}}(0) = 1000 - \mathrm{VP}_{\mathrm{II}} = 705{,}90$ (saldo da opção II no mês 0);

Na HP12c, podemos obter $S_{\mathrm{II}}(0) = 705{,}90$ acrescentando [1] [0] [0] [0] [+] à última sequência resolutiva.

No Excel, obtemos $S_{\mathrm{II}}(0) = 705{,}90$ adicionando 1000 à última fórmula, isto é, =VP(1%; 3; 100) + 1000.

Retomaremos esta abordagem nas observações finais para **A.1**, contextualizando o último resultado com o conceito de VPL.

$4^{\underline{a}}$ solução para A.1

Veremos agora como resolver esta questão no contexto do Capítulo 3.

O parcelamento da opção II nada mais é do que um empréstimo no SFA e o seu custo é o que definimos como TIR. Assim, você só deve optar pela compra parcelada se a referida TIR for menor que a rentabilidade mensal de 1% da sua aplicação, que atua como taxa máxima de atratividade (TMA).

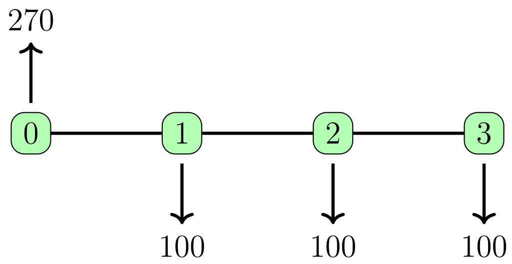
Esta $4^{\underline{a}}$ solução é, portanto, recomendada para introduzir o estudo da viabilidade de operações financeiras e de sistemas de amortizações.

Primeiramente, é pertinente realizar um breve debate sobre anúncios enganosos de vendas a prazo sem juros, quando é dado desconto à vista. No enunciado de **A.1**, não foi mencionado que o parcelamento seria sem juros, pois, de fato, não é, conforme verificaremos a seguir.

Notemos que existe uma taxa de juros embutida na opção II. Ela deve fazer com que os valores absolutos à vista e a prazo se equivalham numa mesma data. Esta taxa representa o custo (TIR) do parcelamento.

Interpretemos então o problema como sendo o empréstimo de 270 reais à taxa mensal TIR, com quitação em 3 pagamentos mensais postecipados de 100 reais.

Figura 5.5: Fluxo de caixa do empréstimo de R$ 270 pago em 3 mensalidades de R$ 100.



Assim, temos $270.(1+TIR)^3 = 100.(1+TIR)^2 + 100.(1+TIR) + 100$ no terceiro mês. Daí, chegamos em $27.(TIR)^3 + 71.(TIR)^2 + 51.(TIR) = 3$.

Como $27.(0{,}1)^3 + 71.(0{,}1)^2 + 51.(0{,}1) = 0{,}027 + 0{,}71 + 5{,}1 = 12{,}227 > 3$ e como $27.(0{,}01)^3 + 71.(0{,}01)^2 + 51.(0{,}01) = 0{,}000027 + 0{,}0071 + 0{,}51 = 0{,}517127 < 3$, então, pela *regra dos sinais de Descartes*, $0{,}01 < TIR < 0{,}1$, ou seja, $1\% < \text{TIR} < 10\%$.

O refinamento desta aproximação é desnecessário aqui, pois, como já obtivemos $TIR > 1\% = TMA$, concluímos que é mais dispendioso parcelar do que comprar à vista, ou seja, do ponto de vista financeiro, a opção I é, de fato, mais vantajosa que a opção II.

Noutras palavras, com o rendimento mensal de 1%, você não daria conta de quitar sua dívida e acabaria entrando para o grupo dos brasileiros inadimplentes.

Neste caso, em particular, foi possível resolver o problema sem recursos tecnológicos, mas eles seriam indispensáveis se tivéssemos que aproximar a TIR com a precisão de várias casas decimais ou se houvesse muito mais do que três parcelas na opção II.

A aproximação $TIR \cong 5{,}46\%$ ao mês pode ser obtida na HP12c, teclando:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}$ $\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ $\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{7}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}$ $\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$.

No Excel, esta taxa é calculada pela fórmula =TAXA(3; -100; 270).

Observações finais para A.1

A partir do conhecimento da taxa de juro de 5,46% ao mês que é cobrada no parcelamento, podemos determinar o valor do juro efetivo $J = M - C$, onde $C = 270$ e $M = M(2) + M(1) + M(0)$, com $M(n) = 100.(1 + 5{,}46\%)^n$, para todo $n \in \{0; 1; 2\}$. Logo, $J = 100.(1{,}0546)^2 + 100.(1{,}0546)^1 + 100.(1{,}0546)^0 - 270 \cong 316{,}68 - 270 = 46{,}68$.

Notemos que $i_t = (46{,}68)/270 \cong 0{,}1729 = 17{,}29\%$ é a taxa de juro trimestral equivalente à taxa mensal de 5,46% obtida anteriormente. No contexto da equivalência de taxas (subseção 2.4.3), podemos constatar que $(1 + i_t)^1 = (1 + 5{,}46\%)^3$.

Interessante observar que o desconto na compra à vista é o típico desconto comercial ou por fora, onde o valor à vista (R$ 270) corresponde ao valor atual de um título de débito pago antes de vencer, cujo valor nominal é o valor a prazo (R$ 300).

O fato de a taxa mensal de 5,46% cobrada no parcelamento ser igual à taxa trimestral de 17,29%, que supera a taxa do desconto (10% ao trimestre), mostra que a opção II, de fato, custa mais que a opção I.

Ressaltamos que os cálculos eletrônicos anteriores que forneceram $TIR \cong 5{,}46\%$ ao mês só foram possíveis porque estamos diante de um caso básico, no qual há somente um fluxo de caixa inicial com sinal contrário aos fluxos de caixa seguintes, os quais constituem uma sequência padrão de pagamentos constantes. Se o fluxo de caixa inicial for uma receita, como ocorre no nosso exemplo, então os fluxos seguintes são despesas com mesmo valor nominal. Analogamente, no caso de um investimento, o fluxo de caixa inicial é uma despesa, enquanto os próximos fluxos são receitas.

Entretanto, se a situação tratar de um conjunto de fluxos de caixa com mais de dois valores nominais distintos, então as funções $\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ da HP12c e "TAXA" do Excel não seriam suficientes para obter a TIR. Assim como não calcularíamos o VPL a partir de $\boxed{[\mathbf{PV}]}$ na HP12c e de "VP" no Excel. Estas servem para obter o valor presente relativo $-294{,}10$ das 3 mensalidades de 100 à taxa de 1% ao mês, cujo cálculo foi realizado na 3ª solução desta atividade. Daí, alcançamos o saldo $S_{II}(0) = 705{,}90$, isto é, $S_{II}(0) = 1000 - 294{,}10 = 1000 - (270 + 24{,}10) = 730 - 24{,}10$. Estes 24,10 são o $VPL = 270 - \left[100/(1+1\%)^1 + 100/(1+1\%)^2 + 100/(1+1\%)^3\right]$.

Para casos em que a sequência de pagamentos não é constante, existem as funções [IRR] = [f] [FV] e [NPV] = [f] [PV] da HP12c e as funções "TIR" e "VPL" do Excel.

Na HP12c, teclamos:

[f] [CLx] (limpa a memória);

[2] [7] [0] [g] [PV] (registra 270 no fluxo de caixa inicial: [CF_0]);

[1] [0] [0] [CHS] [g] [PMT] (registra -100 no 1º fluxo de caixa: [CF_j]);

[3] [g] [FV] (registra 3 ocorrências do último fluxo de caixa em [N_j]);

[f] [FV] (função [IRR] que calcula $TIR \cong 5{,}46\%$ ao mês).

[1] [i] (registra 1% como taxa mínima de atratividade: TMA);

[f] [PV] (função [NPV] que calcula $VPL \cong -24{,}10$).

No Excel, precisamos construir a planilha de fluxo de caixa para, a partir dela, utilizarmos as fórmulas =TIR(valores) e =VPL(1%; valores) + 270. Na primeira, os valores correspondem a todos os fluxos de caixa: 270, -100, -100, -100. Na segunda, devemos retirar apenas o fluxo inicial de 270 dos valores.

Na figura 5.6, mostramos uma planilha Excel do conjunto de fluxos de caixa do empréstimo de R$ 270 quitado em 3 pagamentos de R$ 100, com taxa máxima de atratividade $TMA = 1\%$ ao mês. Acrescentamos o valor presente relativo de cada fluxo (coluna D) e o valor presente líquido acumulado até cada mês $k \in \{0; 1; 2; ; 3\}$ (coluna E). A construção desta planilha é similar à da figura 4.7, explicada no Capítulo 4. Abaixo da planilha (da linha 8 à 12) exibimos os resultados para a TIR e o VPL, indicando entre aspas as diferentes fórmulas que permitem obtê-los.

Figura 5.6: Tabela de fluxo de caixa associado à atividade **A.1**, com TIR e VPL.

	A	B	C	D	E	F
1		Fluxo de Caixa de empréstimo com *TMA* = 1% ao mês				
2		*k*	FC_k	VP(FC_k ; 1%)	VPL_k	
3		0	R$ 270,00	R$ 270,00	R$ 270,00	
4		1	-R$ 100,00	-R$ 99,01	R$ 170,99	
5		2	-R$ 100,00	-R$ 98,03	R$ 72,96	
6		3	-R$ 100,00	-R$ 97,06	-R$ 24,10	
7						
8	*TIR* =	5,46%	ao mês	*VPL* =	-R$ 24,10	
9		↑			↑	
10		"=TAXA(3; -100; 270)"			"=270 - VP(1%; 3; -100)"	
11		ou			ou	
12		"=TIR(C3:C6)"			"=VPL(1%; C4:C6) + 270"	

Aproveitemos o ensejo para adentrarmos no estudo das amortizações.

Conforme dissemos no início, podemos interpretar a situação problema como um empréstimo a ser quitado por uma sequência padrão de pagamentos constantes. Logo, estamos diante de um SFA.

Empregando conhecimentos do Capítulo 3, podemos construir uma tabela de amortizações baseada na da figura 4.6 (subseção 4.2.3 do Capítulo 4). Para tal, basta fazermos as seguintes substituições na planilha do Excel que a gerou: a taxa i vira 5,46% (ao mês), o número de pagamentos n vira 3 (meses) e o saldo inicial S_0 vira R$ 270. Além disto, eliminamos a última linha, pois aquela planilha tinha n igual a 4. Obtemos assim a figura abaixo.

Figura 5.7: Tabela SFA associado à atividade **A.1**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Dados iniciais:**	i =	5,46%	n =	3	S_0 =	R$ 270,00
2							
3	**Tabela SFA**		k	S_k	A_k	J_k	P_k
4			0	R$ 270,00	R$ -	R$ -	R$ -
5	Sistema		1	R$ 184,74	R$ 85,26	R$ 14,74	R$ 100,00
6	Francês de		2	R$ 94,82	R$ 89,92	R$ 10,09	R$ 100,00
7	Amortizações		3	R$ -	R$ 94,82	R$ 5,18	R$ 100,00
8							

5.2 Segunda atividade: A.2

Esta atividade foi inspirada em um problema histórico e sua aplicação é recomendada para introduzir os termos da MF e os regimes de capitalização, no contexto do Capítulo 2. Um objetivo importante desta atividade é comparar as capitalizações composta e mista.

5.2.1 Enunciado da segunda atividade

A.2 Da origem pré-histórica do conceito de número e da geometria, até os nossos dias, marcados por incríveis avanços tecnológicos, muita matemática foi desenvolvida. Neste processo evolutivo, a Matemática Financeira surgiu em meio ao desenvolvimento do comércio, dos regimes econômicos, do crédito e do sistema financeiro. As evidências mais antigas de que o homem detinha alguns destes conhecimentos datam de mais de mil anos a.C.. Um problema encontrado numa tabela babilônica deste período, "perguntava quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20 por cento ao ano (...)." (BOYER, 2010).

Determine este tempo em cada interpretação a seguir.

(a) Incidência dos 20% somente ao final de cada ano (liquidez anual).

(b) Uso da *convenção exponencial* para qualquer intervalo de tempo.

(c) Uso da *convenção linear* exclusivamente para intervalos menores que 1 ano.

Represente graficamente no plano cartesiano a evolução de mil reais em função do tempo, considerando que ele cresça a 20% ao ano em cada uma das interpretações acima.

5.2.2 Soluções da segunda atividade

Antes de começarmos a resolver esta atividade, consideramos importante fazer algumas observações.

Primeiro que, como a quantidade de dinheiro não é mencionada, podemos considerá-la genericamente igual a $C > 0$ (capital inicial). Nosso objetivo é descobrir o tempo necessário para se obter $2.C$ (montante), quando ocorrem aumentos de 20% ao ano (taxa de juros anual de 0,2). Notemos ainda que os juros totais são $J = 2.C - C = C$.

Na verdade, qualquer valor pode ser atribuído a C, sem perda de generalidade. Por exemplo, tomando o capital inicial igual a 1, teremos o montante 2. Este artifício será necessário quando utilizarmos a HP12c e o Excel.

A segunda observação é que, se considerássemos equivocadamente que os 20% ao ano incidam somente sobre o capital inicial C (regime de juros simples), então o cálculo seria imediato. Os juros seriam anualmente constantes e iguais a $(0{,}2).C$. Logo, após 5 anos teríamos juros $5.(0{,}2).C = C$ e, consequentemente, o almejado montante $2.C$.

Entretanto, esta possibilidade não é sequer considerada entre as interpretações sugeridas na atividade, pois, conforme explicamos desde a introdução deste trabalho, não faz sentido uma taxa anual de juros incidir sobre o capital inicial, se já houver decorrido mais do que um ano.

A partir daqui, começamos a resolver, de fato, a atividade **A.2**.

Seja uma quantia em dinheiro qualquer q aplicada a 20% ao ano, em determinada data. Um ano após esta data, q será transformada em $q + 20\%.q = 1,2.q$, isto é, temos o fator de capitalização $1,2$.

Logo, se a quantia aplicada inicialmente for C (capital inicial), então haverá $(1{,}2).C$ após 1 ano; $(1{,}2).(1{,}2).C = (1{,}44).C$ após 2 anos; $(1{,}2).(1{,}44).C = (1{,}728).C$ após 3 anos; $(1{,}2).(1{,}728).C = (2{,}0736).C$ após 4 anos. Daí, deduzimos que o montante gerado por C à taxa de juros de $20\% = 0{,}2$ ao ano, após n anos, é $M(n) = C.(1{,}2)^n$, para $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Esta é uma interessante forma de introdução ao teorema **T-2.1**.

O prazo deve ser sempre aproximado por excesso, pois, por falta, o valor almejado não seria atingido. Sabemos que $M(3) = (1{,}728).C < 2.C < (2{,}0736).C = M(4)$. Vejamos agora como determinar o prazo para se obter $2.C$ em cada proposta da atividade.

Solução para o item (a) de A.2

No item (a), como taxa de juros incide somente ao final de cada ano, seria necessário completar o quarto ano para o capital dobrar. Neste caso não seria possível obter exatamente o montante igual a $2.C$, mas sim $(2{,}0736).C$.

A HP12c calcula o prazo de acordo com esta interpretação. Para obter o prazo de 4 anos nesta máquina, basta teclar:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}$ $\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{FV}]}$ $\boxed{[\mathbf{n}]}$.

Como a HP12c não reconhece incógnitas, substituímos o valor presente C por 1 negativo e, consequentemente, atribuímos o valor 2 ao valor futuro (montante). Esta inversão de sinais é exigida pela convenção da máquina.

Solução para o item (b) de A.2

Supondo que o **T-2.1** ainda não seja conhecido, podemos empregar um método numérico para refinarmos a aproximação da solução anterior. Para isto, basta observarmos que $(1{,}728).C = (1{,}2)^3.C$ e que $(2{,}0736).C = (1,2)^4.C$. Daí, testamos potências de base 1,2 com expoentes entre 3 e 4, na busca pelo número 2. Com auxílio de uma calculadora científica comum, obtemos $(1{,}2)^{3{,}8} \cong 1{,}99935$ e $(1{,}2)^{3{,}9} \cong 2{,}036136$. Então o prazo procurado é cerca de 3,9 anos, que, em meses, são $(3{,}9).12 = 46{,}8$, isto é, 47 meses (3 anos e 11 meses). Esta é a resposta se considerarmos liquidez mensal. Se a liquidez for diária, o prazo seria precisado em dias por $(46{,}8).30 = 1404$ (3 anos, 10 meses e 24 dias). Consideramos aqui o mês comercial de 30 dias porque não foram citadas datas ou referências a dias úteis no enunciado.

A partir do conhecimento do **T-2.1**, bastaria obtermos n tal que $M(n) = 2.C$, isto é, $C.(1 + 0{,}2)^n = 2.C$. Daí, temos $(1{,}2)^n = 2 \Longrightarrow \log(1{,}2)^n = \log(2) \Longrightarrow n.\big[\log(1{,}2)\big] = \log(2) \Longrightarrow n = \big[\log(2)\big]/\big[\log(1{,}2)\big] \cong 3{,}80178$ (este resultado pode ser obtido com uma calculadora científica comum). Como o prazo deve ser aproximado por excesso, podemos considerá-lo $n \cong 3{,}9$ anos.

Os mesmos 3,80178 são calculados no Excel, com a fórmula =NPER(20%; ; -1; 2). Atribuímos novamente -1 ao valor presente e 2 ao valor futuro porque o Excel, assim como a HP12c, opera com sinais opostos para entradas e saídas (Capítulo 4).

Ainda que acionemos $\boxed{\textbf{[STO]}}\boxed{\textbf{[EEX]}}$ na HP12c para colocá-la no "modo juros compostos", ao digitarmos $\boxed{\textbf{[n]}}$, a máquina faz a mesma aproximação para 4 que obtivemos na solução para o item (a) de **A.2**. Porém, se registrarmos o prazo 3,80178 então a HP12c, nesta convenção exponencial, calcula o valor futuro 2 a partir do valor presente -1 e da taxa mensal 20%.

Solução para o item (c) de A.2

Na convenção linear do item (c), devemos adotar regras de *proporcionalidade* para a parte não inteira do prazo, ou seja, exclusivamente para a fração do ano que completa o prazo em que C é duplicado.

Esta é, portanto, uma oportunidade ideal para introduzir os conceitos de juros simples e de capitalização mista.

Sabemos que o prazo procurado está entre 3 e 4 anos e que os juros do 3º para o 4º ano são $M(4) - M(3) = (2{,}0736).C - (1{,}728).C = (0{,}3456).C$. Aplicando a convenção linear neste intervalo de 12 meses, obtemos juros mensais de $(0{,}3456).C/12 = (0{,}0288).C$.

Logo, o tempo necessário para se obter $2.C$ é 3 anos e x meses tal que $1,728.C + x.(0,0288.C) = 2.C$. Multiplicando os dois membros por $1/C$ e resolvendo a equação remanescente, obtemos $x \cong 9,444$. Aproximando para mais, temos o prazo de 3 anos e 10 meses (46 meses).

Sendo a liquidez diária e o mês comercial, temos, em dias, $x \cong (9,444).30 \cong 283,333$. Logo, neste caso, o prazo é de 3 anos e 284 dias (1364 dias).

Equivalente, temos a proporção $\big[(2{,}0736).C - (1{,}728).C\big]/1 = \big[2.C - (1{,}728).C\big]/y$, onde o prazo para obter $2.C$ é $(3 + y)$ anos, com $0 < y < 1$. Daí, obtemos $y \cong 0{,}787$ ano. Em meses, temos $y \cong 12.(0{,}787) \cong 9{,}4$ e, em dias, temos $y \cong 360.(0{,}787) \cong 283{,}3$. Estes resultados corroboram os anteriores.

O que fizemos até aqui foi adotar juros simples para um intervalo de tempo menor que o período da taxa (situação típica deste regime, que caracteriza a capitalização mista). Refazendo as contas nas notações do **T-2.2**, temos $M_s\big((1{,}728).C\,;\,20\%\,;\,y\big) = 2.C$, isto é, $(1{,}728).C.(1 + 20\%.y) = 2.C$, donde obtemos o mesmo $y \cong 0{,}787$.

Vejamos agora como resolver o item (c) utilizando resultados da subseção 2.4.8 (capitalização mista). Aplicando **T-2.3**, o problema se resume a determinar o prazo n, em anos, tal que $\mu(C\,;\,20\%\,;\,n) = 2.C$, isto é, $C.(1{+}20\%)^{\lfloor n \rfloor}.\big[1{+}(20\%).(n{-}\lfloor n \rfloor)\big] = 3.C$, onde $\lfloor n \rfloor$ é a parte inteira do número n. Como já sabemos que $n = 3 + y$, com $0 < y < 1$, então podemos reescrever $C.(1 + 20\%)^3.\big[1 + (20\%).(y)\big] = 2.C$. Daí, obtemos novamente $y \cong 0{,}787$.

Mesmo operando com capitalização mista, a HP12c aproxima o prazo para 4 quando registramos a taxa mensal de 20%, o valor presente -1 e o valor futuro 2, conforme a solução para o item (a) de **A.2**. Porém, se inserirmos o prazo 3,787, ela retorna o valor futuro esperado.

Teclemos:

$\boxed{[\,\mathbf{f}\,]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}$ $\boxed{[\mathbf{3}]}\boxed{[\,.\,]}\boxed{[\mathbf{7}]}\boxed{[\mathbf{8}]}\boxed{[\mathbf{7}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ $\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\,\mathbf{i}\,]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{FV}]}$.

O resultado é 2, pois corresponde à receita em 3,787 anos, decorrente da despesa 1, à taxa anual de 20%, quando consideramos a capitalização mista.

Segundo Boyer (2010), "parece inteiramente claro que o escriba usou interpolação linear (...)" e "a fórmula para juros compostos" para obter a resposta deste problema histórico. Logo, sua solução original emprega a convenção proposta no item (c).

Soluções da parte final da atividade A.2

N última parte desta atividade, solicita-se a representação gráfica da evolução de R$ 1000 no tempo, à taxa de 20% ao ano, conforme os itens (a), (b) e (c). Esta análise permite, entre muitas outras coisas, visualizar graficamente quando o capital dobra.

Na liquidez anual do item (a), o gráfico do montante em função do tempo será constituído por todos os pontos $(n; M(n))$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (em anos) e $M(n) = 1000.(1{,}2)^n$ (em reais). Este gráfico está na figura 5.8.

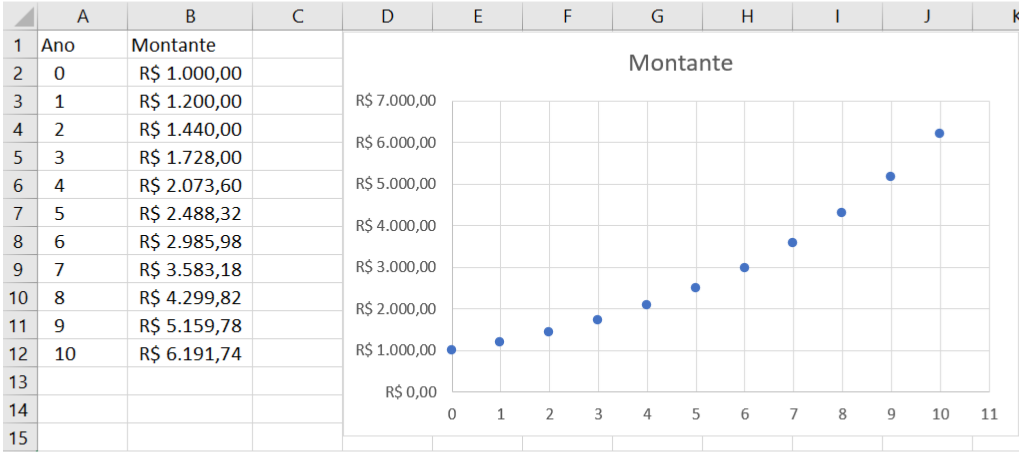
Na *convenção exponencial* do item (b), basta alterarmos o domínio da função anterior para $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$. Este é o gráfico da figura 5.9.

Na *convenção linear* de (c), temos o gráfico da função caracterizada algebricamente por $\mu(n) = 1000.(1{,}2)^{\lfloor n \rfloor}.\Big[1 + (0{,}2).\big(n - \lfloor n \rfloor\big)\Big]$, para todo $n \in \mathbb{Q}_+$ (em anos). Apresentamos este gráfico na figura 5.10.

Os gráficos das figuras 5.8, 5.9 e 5.10 são feitos no Excel. Nos três casos, primeiro construimos a planilha da evolução de R$ 1000 à 20% ao ano. Para tal, inserimos Ano, Montante e 0 em A1, B1 e A2, respectivamente. Depois inserimos em B2 a fórmula =VF(0,2; A2; ; -1000) (também poderíamos formular =1000*1,2^A2, mas o resultado não viria com R$ e aproximação de duas casas decimais). Pelo método de arrasto, levamos as informações de A2 e B2 até a linha desejada (neste caso, linha 12).

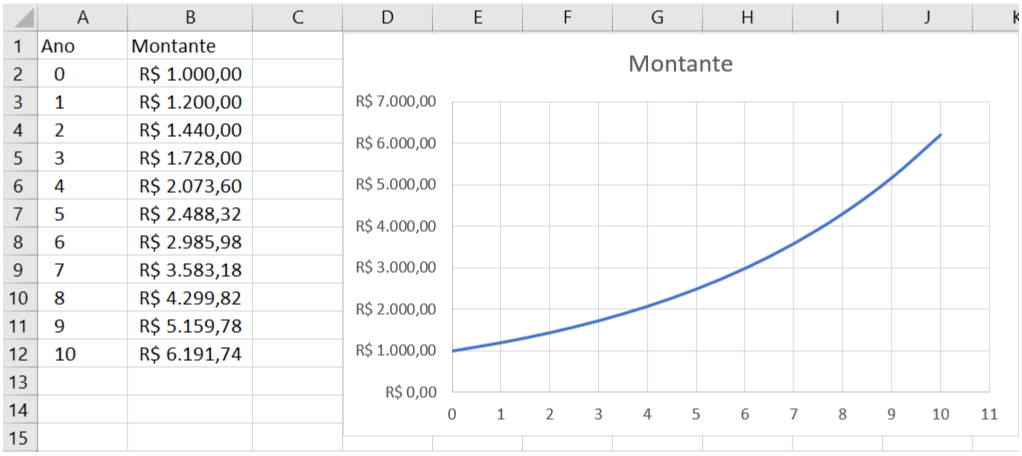
Selecionamos então de A1 até B12 e, para cada função anterior, escolhemos uma opção gráfica da ferramenta "Inserir Gráfico de Dispersão (X, Y) ou de Bolha". Para a figura 5.8 optamos por "Dispersão". Para a figura 5.9, optamos por "Dispersão com Linhas Suaves". Para a figura 5.10, optamos por "Dispersão com Linhas Retas" para a figura 5.10 (nesta última, alteramos a cor azul da linha do gráfico para roxa).

Figura 5.8: Gráfico de $M : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}\,;\ M(n) = 1000.(1{,}2)^n$.



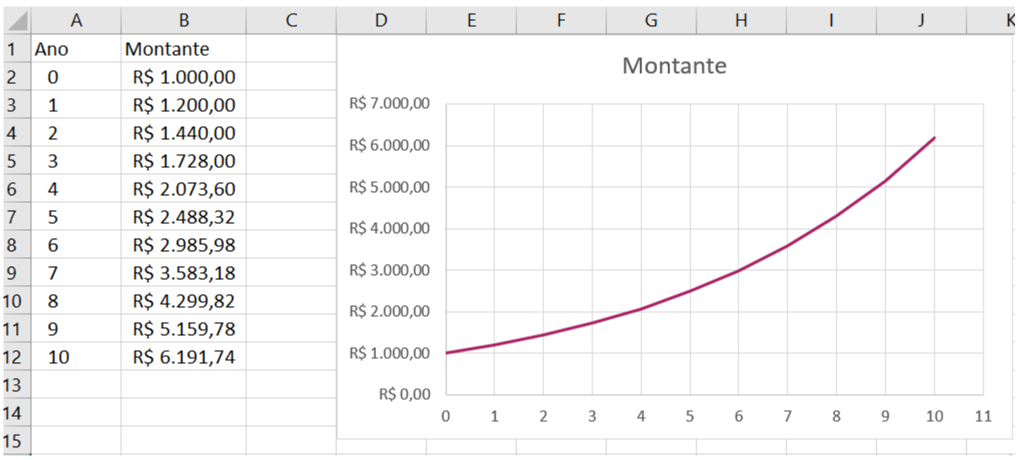
	A	B
1	Ano	Montante
2	0	R$ 1.000,00
3	1	R$ 1.200,00
4	2	R$ 1.440,00
5	3	R$ 1.728,00
6	4	R$ 2.073,60
7	5	R$ 2.488,32
8	6	R$ 2.985,98
9	7	R$ 3.583,18
10	8	R$ 4.299,82
11	9	R$ 5.159,78
12	10	R$ 6.191,74

Figura 5.9: Gráfico de $M : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}\,;\ M(n) = 1000.(1{,}2)^n$.



	A	B
1	Ano	Montante
2	0	R$ 1.000,00
3	1	R$ 1.200,00
4	2	R$ 1.440,00
5	3	R$ 1.728,00
6	4	R$ 2.073,60
7	5	R$ 2.488,32
8	6	R$ 2.985,98
9	7	R$ 3.583,18
10	8	R$ 4.299,82
11	9	R$ 5.159,78
12	10	R$ 6.191,74

Figura 5.10: Gráfico de $\mu : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}\,;\ \mu(n) = 1000.(1{,}2)^{\lfloor n \rfloor}.\Big[1 + (0{,}2).(n - \lfloor n \rfloor)\Big]$.

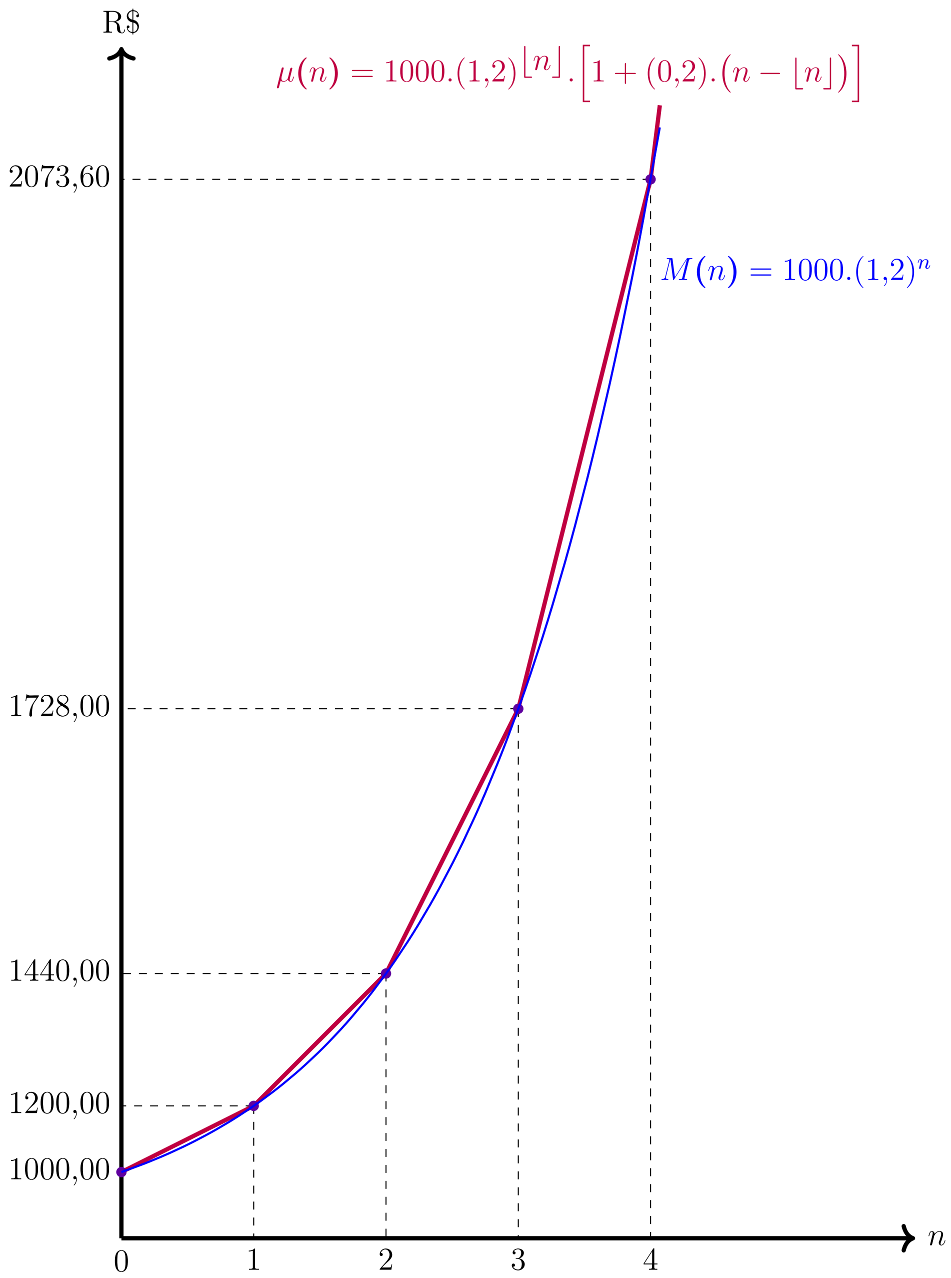


	A	B
1	Ano	Montante
2	0	R$ 1.000,00
3	1	R$ 1.200,00
4	2	R$ 1.440,00
5	3	R$ 1.728,00
6	4	R$ 2.073,60
7	5	R$ 2.488,32
8	6	R$ 2.985,98
9	7	R$ 3.583,18
10	8	R$ 4.299,82
11	9	R$ 5.159,78
12	10	R$ 6.191,74

A suavidade do crescimento exponencial de $(1{,}2)^n$ torna praticamente impossível distinguir a curva na figura 5.9 dos segmentos de reta na figura 5.10. Para tornar perceptível esta distinção, seria necessária uma aproximação adequada ou um programa específico para construção de gráficos.

A fim de evidenciar melhor a diferença entre estes gráficos, decidimos sobrepô-los no esboço abaixo.

Figura 5.11: Gráficos das funções M e μ anteriores, definidas de $\mathbb{Q}_+$ em $\mathbb{R}$.



Esta representação gráfica remete imediatamente à irônica "regra de ouro", segundo a qual, quem tem o ouro dita a regra, ou seja, o detentor do dinheiro tende a escolher a convenção de cálculo de juros que lhe for mais lucrativa. Por isto, as instituições financeiras cobram juros compostos ao concederem um empréstimo, mas, se houver atraso no pagamento, costumam cobrar juros simples sobre o saldo devedor. Já tratamos disto no Capítulo 2.

Naquela oportunidade, também vimos o desconto de título. Neste caso, a convenção exponencial do item (b) é comumente utilizada pelos credores ao concederem descontos pelo pagamento antecipado de uma prestação (título de débito). Por outro lado, a convenção linear do item (c) é mais utilizada na antecipação de recebíveis (títulos de crédito).

5.3 Terceira atividade: A.3

Esta atividade tratará de investimentos e financiamentos, retomando exemplos apresentados no Capítulo 3. Neste contexto, analisaremos uma aplicação financeira e os dois sistemas de amortizações mais utilizados no Brasil.

Veremos aqui uma situação na qual que pode fazer diferença escolher o SAC ou o SFA, mesmo considerando as mesmas condições iniciais para ambos.

5.3.1 Enunciado da terceira atividade

A.3 João tem o excelente hábito de aplicar exatamente mil reais todo mês em um investimento com rentabilidade mensal de 1%. Após certo tempo, sem realizar qualquer outra movimentação financeira nesta aplicação, ele conseguiu juntar cerca de 50 mil reais.

João pretende utilizar esta quantia para dar entrada na compra de um imóvel que custa 80 mil reais. O restante, ele irá financiar em 4 anuidades, junto a uma instituição financeira, que lhe propõe duas formas de realizar os pagamentos, ambas com taxa de juros de 10% ao ano. Uma forma é no SAC (Sistema de Amortizações Constantes) e a outra é no SFA (Sistema Francês de Amortizações, caracterizado por prestações constantes).

Considerando que daqui 2 anos João terá uma despesa extra de 6 mil reais e desconsiderando outros eventuais fatores, responda:

(a) Quanto tempo levou para João juntar os 50 mil reais na aplicação financeira?

(b) É indiferente para João optar pelo SAC ou pelo SFA?

Supondo que a taxa anterior fosse nominal com capitalização mensal, João estaria diante do sistema Price de amortizações. Construa uma planilha eletrônica da tabela Price referente a esta situação.

5.3.2 Soluções da terceira atividade

Para resolver o item (a), basta saber deslocar valores monetários no tempo.

No item (b), retomaremos os exemplos 3.6 e 3.7 do Capítulo 3. Mas agora, existe um contexto que relaciona uma aplicação financeira com um financiamento. Além disto, embora as duas opções de pagamento no SAC e no SFA se equivalham a princípio, verificaremos que a hipótese de uma despesa extra influencia na escolha do sistema de amortização a ser adotado.

No final, construiremos uma Tabela Price no Excel.

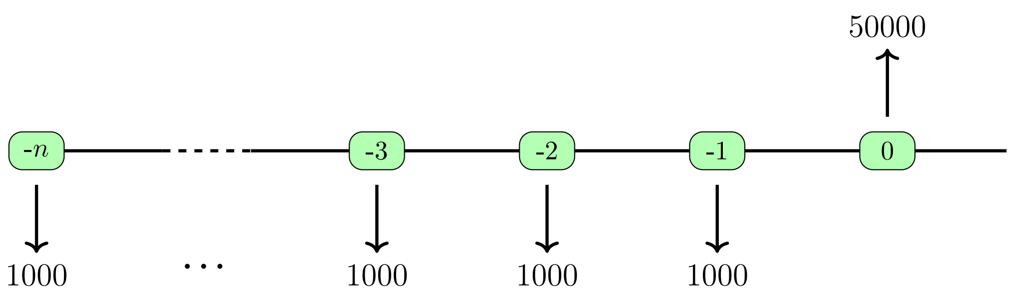
Solução para o item (a) de <u>A.3</u>

Um erro infantil nesta solução seria pensar que levaram 50 meses para juntar R$ 50000, simplesmente porque este é o produto de 50 por 1000. Esta conta infringe o mandamento básico da MF, pois considera válida a adição de valores nominais de datas distintas, sem a devida correção monetária.

Como existe uma taxa de juros de 1% ao mês, então, certamente, em 50 meses, o valor acumulado será maior que R$ 50000. Talvez a única utilidade do produto anterior seja obter uma estimativa inicial, pois deste resultado, podemos afirmar que o tempo procurado é menos de 50 meses.

Para facilitar o entendimento do item (a) desta questão, ilustraremos a aplicação financeira de João em um diagrama de fluxo de caixa (figura 5.12). Como estamos tratando de valores que João depositou no passado, iremos considerar que eles se referem a prazos negativos, anteriores à data zero. Esta representa o momento em que é firmado o contrato de financiamento.

Figura 5.12: Fluxo de caixa de n aplicações de mil reais gerando 50 mil reais.



Considerando então que houve n depósitos de mil reais, desloquemos todos para o presente, que, na verdade, é um tempo futuro em relação à data do primeiro depósito.

Como a taxa mensal é de $1\% = 0{,}01$ e o valor futuro ("hoje") é 50 mil reais, então $1000.(1{,}01)^n + 1000.(1{,}01)^{n-1} + \cdots + 1000.(1{,}01)^2 + 1000.(1{,}01)^1 = 50000$. Aplicando a fórmula SPG, temos $1000.(1{,}01).\big[(1-(1{,}01)^n)/(1-1{,}01)\big] = 50000$. Daí, chegamos em $(1{,}01)^n \cong 1{,}5$, donde $\log(1{,}01)^n = \log(1{,}5) \Longrightarrow n = \log(1{,}5)/\log(1{,}01) \cong 40{,}75$. Logo, foram necessários cerca de 41 meses para João juntar os R$ 50000.

Este é o mesmo resultado que obtemos formulando =NPER(1%; -1000; ; 50000) no Excel, visto que ele usa a "convenção exponencial" dos juros compostos.

Na HP12C, o resultado 41 é imediatamente obtido teclando

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}\ \boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{i}]}\ \boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}\ \boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{FV}]}\ \boxed{[\mathbf{n}]}$.

Conforme explicamos antes, a HP12c aproxima o prazo inteiro n em que é formado o menor montante $M = \sum_{k=1}^{n} 1000.(1{,}01)^k$ tal que $M \geq 50000$. Logo, o resutado da HP12C indica, na realidade, que o prazo n é um número de meses tal que $40 < n \leq 41$. Como, nesta situação, prazos fracionários não interessam, então devemos considerá-lo 41 meses, ou seja, João realizou 41 depósitos mensais de mil para acumular os 50 mil. Porém, a quantia exata acumulada foi um pouco maior e ela pode ser obtida teclando $\boxed{[\mathbf{FV}]}$ após a última sequência resolutiva.

Solução para o item (b) de A.3

Analisemos agora as duas possibilidades que João tem de financiar 30 mil reais.

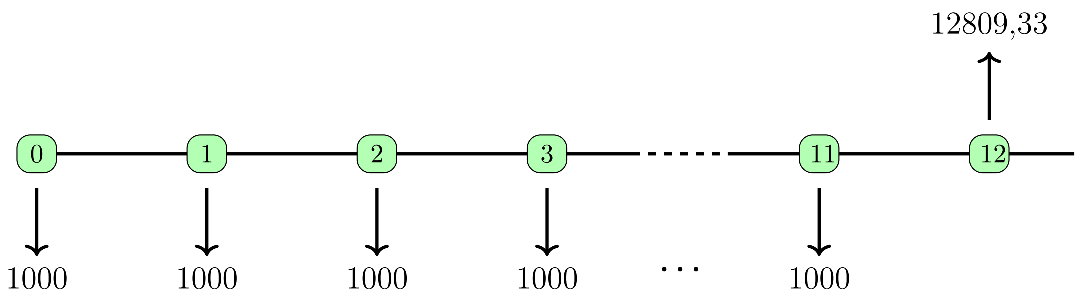
Do Capítulo 3, sabemos que, no SAC, João precisará desembolsar anualmente 10500, 9750, 9000 e 8250 reais (nesta ordem) e, no SFA, o desembolso anual será constante e igual a R$ 9464,12. Estes valores podem ser obtidos pela construção das tabelas apresentadas no Capítulo 3 (figuras 3.8 e 3.9) e refeitas no Capítulo 4 com auxílio do Excel (figuras 4.5 e 4.6), ou diretamente por fórmulas mostradas nas subseções 3.3.1 e 3.3.2.

De acordo com o enunciado da atividade, João continuará depositando mil reais por mês na sua aplicação financeira, que ficou "zerada" após a retirada dos 50 mil reais para dar de entrada na compra do imóvel.

A fim de aproveitarmos os resultados supracitados (sequências de pagamentos anuais oriundas dos exemplos 3.6 e 3.7, previamente analisados no Capítulo 3), transformemos cada os depósitos mensais de João em montantes anuais.

Após os primeiros 12 meses (do depósito inicial ao do 11º mês), João terá na sua aplicação financeira: $1000.(1{,}01)^1 + 1000.(1{,}01)^2 + 1000.(1{,}01)^3 + \cdots + 1000.(1{,}01)^{12} \overset{\text{SPG}}{=} 1000.(1{,}01).\big[1-(1{,}01)^{12}\big]/\big[1-(1{,}01)\big] \cong 12809{,}33$. Isto equivale a calcular o valor futuro de 12 pagamentos mensais antecipados, mediante a taxa de 1% ao mês, conforme mostramos na figura 5.13.

Figura 5.13: Fluxo de caixa de 12 aplicações mensais de mil reais, a 1% ao mês.



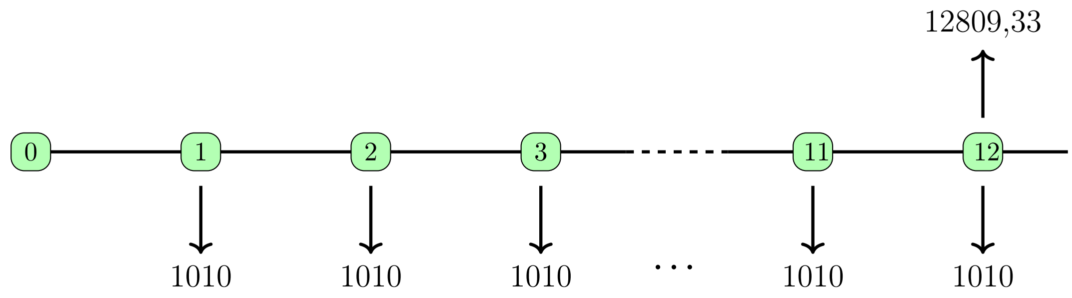
Para calcular na HP12c, devemos acionar seu "modo begin": [BEG] = [g] [7] (neste caso, os pagamentos são de R$ 1000). Obtemos então os R$ 12809,33, teclando

[g] [7] [f] [CLx] [1] [2] [n] [1] [i] [1] [0] [0] [0] [CHS] [PMT] [FV] .

Obtemos o mesmo resultado no Excel, pela fórmula =VF(1%; 12; 1000)*1,01. Desta forma, estamos deslocando 12 pagamentos postecipados para o mês seguinte, pois este resultado equivale ao valor futuro dos 12 pagamentos antecipados.

Outra opção é deslocarmos cada mil reais para o mês seguinte, considerando que os pagamentos sejam postecipados com valor nominal R$ 1000.(1,01) = R$ 1010. Neste caso, temos o diagrama de fluxo de caixa da figura 5.14, que é equivalente ao da figura 5.13.

Figura 5.14: Fluxo de caixa equivalente ao fluxo da figura 5.13.



Assim, obtemos os mesmos R$ 12809,33 na HP12c, teclando:

[g] [8] [f] [CLx] [1] [2] [n] [1] [i] [1] [0] [1] [0] [CHS] [PMT] [FV] .

Note que recolocamos a HP12c no "modo end": [END] = [g] [8] (postecipação).

Considerando esta interpretação, formulamos =VF(1%; 12; 1010) no Excel a fim de calcularmos o valor futuro anterior.

Se João optar pelo SAC, então, após efetuar o primeiro pagamento, teria na sua aplicação: 12809,33 − 10500,00 = 2309,33. Se optar pelo SFA, seu saldo seria 12809,33 − 9464,12 = 3345,21.

Nos próximos 12 meses, João acumularia 12809,33 + 2309,33.$(1{,}01)^{12} \cong$ 15411,54, no SAC. Por outro lado, teria 12809,33 + 3345,21.$(1{,}01)^{12} \cong$ 16578,80, no SFA.

Ao efetuar o segundo pagamento anual de R$ 9750,00 no SAC, sobrariam R$ 5661,54. No SFA, após pagar a segunda prestação de R$ 9464,12, João teria R$ 7114,68.

De acordo com o enunciado do problema, no final do segundo ano, João terá uma despesa extra de 6 mil reais. Esta quantia só estará disponível para ele, se optar pelo SFA. Logo, não é indiferente para João escolher qualquer um dos sistemas de amortizações.

Notemos ainda que, optando pelo SFA, João teria plenas condições de quitar a sua dívida. No final do terceiro ano, ele teria 12809,33 + (7114,68 − 6000).$(1{,}01)^{12} \cong$ 14065,38 e, após pagar a terceira parcela anual, ficaria com 14065,38 − 9464,12 = 4601,26. No fim do último ano, ele teria 12809,33 + 4601,26.$(1{,}01)^{12} \cong$ 17994,14 (dinheiro de sobra para pagar sua última prestação de R$ 9464,12).

Por outro lado, se João optar pelo SAC, não poderá pagar a despesa de R$ 6000,00 que terá no segundo ano. Pelo menos não completamente. Podemos supor que ele pagaria R$ 5661,54 desta dívida e ficaria devendo R$ 338,46 para o mês seguinte. Como não sabemos a taxa de juro cobrada por este atraso, não podemos afirmar que João teria condições de arcar com as próximas prestações no SAC.

Logo, o SAF é o sistema de amortizações mais indicado para João.

Solução da parte final de A.3

Observemos que, na solução do item (b), trabalhamos com 4 anuidades para facilitar as contas, mas poderíamos substituí-las por 48 mensalidades. Na hipótese enunciada, a taxa de 10% ao ano seria capitalizada mensalmente. Daí, temos a taxa efetiva mensal $(10\%)/12 \cong 0{,}8333\% = 0{,}008333$.

Na subseção 3.3.2, já vimos que esta taxa acarreta pagamentos de R$ 760,88 por mês, pois $\sum_{k=1}^{48}(760{,}88)/(1{,}008333)^k \overset{\text{SPG}}{=} 760{,}88.\left[1-(1{,}008333)^{-48}\right]/\left[0{,}008333\right] \cong 30000$.

O cálculo deste pagamento pode ser rapidamente efetuado na HP12C:

$\boxed{[\mathbf{f}]}\,\boxed{[\mathbf{CL}x]}\ \boxed{[4]}\,\boxed{[8]}\,\boxed{[\mathrm{n}]}\ \boxed{[1]}\,\boxed{[0]}\,\boxed{[\mathrm{g}]}\,\boxed{[\mathrm{i}]}\ \boxed{[3]}\,\boxed{[0]}\,\boxed{[0]}\,\boxed{[0]}\,\boxed{[0]}\,\boxed{[\mathbf{PV}]}\ \boxed{[\mathbf{PMT}]}$.

O resultado será −760,88 devido à convenção da máquina. Assim, como ocorre se resolvermos no Excel pela fórmula =PGTO(10%/12; 48; 30000).

Observamos ainda que, tanto [1] [0] [g] [i] = [12÷] (na HP12c), quanto 10%/12 (no Excel), registram uma aproximação melhor do valor da taxa mensal do que 0,8333%.

A partir dos valores obtidos (taxa efetiva e pagamentos), poderíamos construir a tabela Price manualmente, de modo análogo à tabela SFA da figura 3.9. Mas isto seria bastante trabalhoso. Faremos, portanto, a referida tabela no Excel.

As únicas informações necessárias são a seguintes: o empréstimo de R$ 30000 cobra juro de 10% ao ano com capitalização mensal e é pago em 48 mensalidades, no Sistema Price de amortizações. Esta construção é análoga à da tabela SFA (figura 4.6), que fizemos no Capítulo 4.

A fim de evitar problemas com falta de espaço, redimensionamos as colunas A, B, C, D, E, F e G com a largura 15.

O objetivo aqui é criar uma planilha eletrônica que sirva para obter qualquer outra do mesmo tipo. Para isto, começamos inserindo **Dados iniciais:** , **i =** , 10% , **n =** , 48 , **S_0 =** e 30000 da célula A1 até a G1. Estas informações serão retomadas nas fórmulas adiante.

Pulamos para a linha 3 para inserir **k**, **S_k** , **A_k** , **J_k** e **P_k** de C3 até G3.

Em seguida, registramos o número 0 em C4, E4, F4 e G4 e o número 1 em C5, e formulamos =G1 em D4.

Continuamos inserindo as fórmulas =$D4 + $E5 em D5, =($C$1/12)*D4 em F5, =PGTO($C$1/12; $E$1; $G$1) em G5 e =$G5 - $F5 em E5.

Replicamos então C5, D5, E5, F5 e G5 pelo "método de arrasto" para as células abaixo, da linha 6 até a 52.

Por estética, utilizamos "Formato de número de contabilização" em todas as células com valores monetários (G1 e de D4 até G52). Além disto, realinhamos textos e destacamos alguns contornos.

Também inserimos verticalmente na coluna A "TABELA PRICE COM TAXA ANUAL CAPITALIZADA AO MÊS", a fim de ressaltar as características da taxa nominal informada em C1.

Exibimos a planilha Excel assim construída na figura 5.15.

Esta planilha serve para a construção de outras Tabela Price, desde que tenham taxa de juros anual capitalizada mensalmente. Para tal, basta alterar os dados iniciais: a taxa de juro em C1, o número de pagamentos em E1 e o saldo inicial em G1.

Figura 5.15: Tabela Price no Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dados iniciais:	i =	10%	n =	48	S_0 =	R$ 30.000,00
2							
3			k	S_k	A_k	J_k	P_k
4	T		0	R$ 30.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
5	A		1	R$ 29.489,12	R$ 510,88	R$ 250,00	R$ 760,88
6	B		2	R$ 28.973,99	R$ 515,13	R$ 245,74	R$ 760,88
7	E		3	R$ 28.454,56	R$ 519,43	R$ 241,45	R$ 760,88
8	L		4	R$ 27.930,80	R$ 523,76	R$ 237,12	R$ 760,88
9	A		5	R$ 27.402,68	R$ 528,12	R$ 232,76	R$ 760,88
10			6	R$ 26.870,16	R$ 532,52	R$ 228,36	R$ 760,88
11	P		7	R$ 26.333,20	R$ 536,96	R$ 223,92	R$ 760,88
12	R		8	R$ 25.791,77	R$ 541,43	R$ 219,44	R$ 760,88
13	I		9	R$ 25.245,82	R$ 545,95	R$ 214,93	R$ 760,88
14	C		10	R$ 24.695,33	R$ 550,50	R$ 210,38	R$ 760,88
15	E		11	R$ 24.140,24	R$ 555,08	R$ 205,79	R$ 760,88
16			12	R$ 23.580,53	R$ 559,71	R$ 201,17	R$ 760,88
17	C		13	R$ 23.016,16	R$ 564,37	R$ 196,50	R$ 760,88
18	O		14	R$ 22.447,08	R$ 569,08	R$ 191,80	R$ 760,88
19	M		15	R$ 21.873,27	R$ 573,82	R$ 187,06	R$ 760,88
20			16	R$ 21.294,67	R$ 578,60	R$ 182,28	R$ 760,88
21	T		17	R$ 20.711,24	R$ 583,42	R$ 177,46	R$ 760,88
22	A		18	R$ 20.122,96	R$ 588,28	R$ 172,59	R$ 760,88
23	X		19	R$ 19.529,77	R$ 593,19	R$ 167,69	R$ 760,88
24	A		20	R$ 18.931,64	R$ 598,13	R$ 162,75	R$ 760,88
25			21	R$ 18.328,53	R$ 603,11	R$ 157,76	R$ 760,88
26	A		22	R$ 17.720,39	R$ 608,14	R$ 152,74	R$ 760,88
27	N		23	R$ 17.107,18	R$ 613,21	R$ 147,67	R$ 760,88
28	U		24	R$ 16.488,87	R$ 618,32	R$ 142,56	R$ 760,88
29	A		25	R$ 15.865,40	R$ 623,47	R$ 137,41	R$ 760,88
30	L		26	R$ 15.236,73	R$ 628,67	R$ 132,21	R$ 760,88
31			27	R$ 14.602,83	R$ 633,90	R$ 126,97	R$ 760,88
32	C		28	R$ 13.963,64	R$ 639,19	R$ 121,69	R$ 760,88
33	A		29	R$ 13.319,12	R$ 644,51	R$ 116,36	R$ 760,88
34	P		30	R$ 12.669,24	R$ 649,88	R$ 110,99	R$ 760,88
35	I		31	R$ 12.013,94	R$ 655,30	R$ 105,58	R$ 760,88
36	T		32	R$ 11.353,18	R$ 660,76	R$ 100,12	R$ 760,88
37	A		33	R$ 10.686,91	R$ 666,27	R$ 94,61	R$ 760,88
38	L		34	R$ 10.015,09	R$ 671,82	R$ 89,06	R$ 760,88
39	I		35	R$ 9.337,67	R$ 677,42	R$ 83,46	R$ 760,88
40	Z		36	R$ 8.654,61	R$ 683,06	R$ 77,81	R$ 760,88
41	A		37	R$ 7.965,85	R$ 688,76	R$ 72,12	R$ 760,88
42	D		38	R$ 7.271,36	R$ 694,50	R$ 66,38	R$ 760,88
43	A		39	R$ 6.571,07	R$ 700,28	R$ 60,59	R$ 760,88
44			40	R$ 5.864,95	R$ 706,12	R$ 54,76	R$ 760,88
45	A		41	R$ 5.152,95	R$ 712,00	R$ 48,87	R$ 760,88
46	O		42	R$ 4.435,02	R$ 717,94	R$ 42,94	R$ 760,88
47			43	R$ 3.711,10	R$ 723,92	R$ 36,96	R$ 760,88
48	M		44	R$ 2.981,15	R$ 729,95	R$ 30,93	R$ 760,88
49	Ê		45	R$ 2.245,11	R$ 736,03	R$ 24,84	R$ 760,88
50	S		46	R$ 1.502,94	R$ 742,17	R$ 18,71	R$ 760,88
51			47	R$ 754,59	R$ 748,35	R$ 12,52	R$ 760,88
52			48	R$ 0,00	R$ 754,59	R$ 6,29	R$ 760,88

5.4 Quarta atividade: A.4

Nesta atividade, exploramos a tomada de decisão em relação a investimentos financeiros. Ela trata de conteúdos do Capítulo 3, mas pode ser trabalhada inicialmente no contexto do Capítulo 2.

5.4.1 Enunciado da quarta atividade

A.4 Pretendendo realizar uma aplicação financeira de R$ 1000, Maria estabelece, a princípio, um horizonte de planejamento de 5 anos. Como ela ainda não possui uma reserva de emergência, deve escolher um investimento seguro e de alta liquidez, pois pode precisar resgatar o dinheiro antes do prazo planejado.

Após pesquisar em sites do Tesouro Direto, do Banco Central do Brasil, do IBGE, do Banco do Brasil e da CAIXA, Maria organizou numa tabela (figura 5.16) as modalidades de investimento mais adequadas ao seu perfil conservador: uma Caderneta de Poupança, um CDB (Certificado de Depósito Bancário), um título do Tesouro Nacional, uma LCI (Letra de Crédito Imobiliário) e um Fundo DI (Fundo de renda fixa atrelado à taxa de depósitos interbancários).

Figura 5.16: Tabela de investimentos (criação nossa).

Modalidade de investimento	Rentabilidade bruta ao ano	Encargo anual sobre rendimentos
Poupança	4,69 %	0 %
CDB	5,53 %	15 %
Tesouro	8,31 %	18 %
LCI	4,97 %	0 %
Fundo DI	5,67 %	16 %

Os encargos são somas de taxas de imposto, tarifas administrativas e outros custos que incidem somente sobre os rendimentos das aplicações financeiras.

Qual a modalidade de investimento mais vantajosa e a menos vantajosa para Maria?

5.4.2 Soluções da quarta atividade

Antes de começar a fazer contas é interessante notar que a LCI é mais vantajosa do que a Poupança, pois a rentabilidade desta é menor que a daquela e ambas são isentas de encargos. Porém, como a atividade pede a modalidade mais vantajosa e a menos vantajosa, será preciso analisar todas.

$1^{\underline{a}}$ solução para A.4

Introdutoriamente, esta atividade pode ser resolvida a partir da seguinte compreensão básica: deslocar um capital C para o futuro, à taxa de juros i, significa multiplicar C pelo fator de capitalização $(1+i)$, quantos períodos de i desejarmos.

No contexto da seção 2.4 do Capítulo 2, o que mencionamos acima é o mesmo que obter um montante no regime de capitalização composta. Logo, basta utilizarmos o teorema **T-2.1**: $M(C;i;n) = C.(1+i)^n$, onde $C = 1000$ reais, $n = 5$ anos e i é a rentabilidade bruta anual de cada modalidade de investimento. Em seguida, descontamos os encargos sobre os rendimentos, isto é, sobre os juros $C.(1+i)^n - C = C.\big[(1+i)^n - 1\big]$.

Assim, os "montantes líquidos" daqui 5 anos serão:

- $1000.(1+4{,}69\%)^5 \cong 1257{,}55$, na Poupança;
- $1000.(1+5{,}53\%)^5 - (15\%).1000.\big[(1+5{,}53\%)^5 - 1\big] \cong 1262{,}50$, no CDB;
- $1000.(1+8{,}31\%)^5 - (18\%).1000.\big[(1+8{,}31\%)^5 - 1\big] \cong 1402{,}24$, no Tesouro;
- $1000.(1+4{,}97\%)^5 \cong 1274{,}46$, na LCI;
- $1000.(1+5{,}67\%)^5 - (16\%).1000.\big[(1+5{,}67\%)^5 - 1\big] \cong 1266{,}72$, no Fundo DI.

Logo, o título do Tesouro é o mais vantajoso e a Poupança é a menos vantajosa.

Para calcular o primeiro valor (montante da Poupança) na HP12c, teclamos

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}$ $\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\mathbf{n}]}$ $\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{[\,.\,]}\boxed{[\mathbf{6}]}\boxed{[\mathbf{9}]}\boxed{[\mathbf{i}]}$ $\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{CHS}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$ $\boxed{[\mathbf{FV}]}$.

Pela fórmula =VF(4,69%; 5; ; -1000) do Excel, obtemos o mesmo resultado. De modo análogo, calculamos o montante da LCI na HP12c e no Excel. Para isto, basta substituirmos a taxa 4,69% por 4,97%.

O mesmo raciocínio vale para todos os "valores futuros brutos". Depois, basta descontar os encargos. Por exemplo, após obtermos o valor bruto do CDB igual a R$ 1308,82, teclamos na HP12c:

$\boxed{[\mathbf{STO}]}\boxed{[\mathbf{1}]}$ (grava 1308,82 na memória 1);

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[-]}$ (calcula $1308{,}82 - 1000 = 308{,}82$);

$\boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{5}]}\boxed{[\%]}$ (calcula 15% de 308,82, isto é, 46,32);

$\boxed{[\mathbf{CHS}]}$ (inverte o sinal do último registro salvando $-46{,}32$);

$\boxed{[\mathbf{RCL}]}\boxed{[\mathbf{1}]}$ (chama para o visor o registro da memória 1, isto é, 1308,82);

$\boxed{[+]}$ (calcula $-46{,}32 + 1308{,}82 = 1262{,}50$).

Formulamos =VF(5,53%; 5; ; -1000) - 15%*(VF(5,53%; 5; ; -1000) - 1000) no Excel para obter o mesmo resultado.

2ª solução para A.4

Em vez de comparar os montantes líquidos das aplicações após 5 anos, como fizemos na solução anterior, podemos comparar seus rendimentos líquidos ou apenas as suas taxas de rentabilidade líquida.

Consideremos que uma aplicação tenha rentabilidade i e taxa de desconto d para pagamento de encargos, de modo que d incide somente sobre os rendimentos.

Aplicando o capital C durante n períodos de i, obtemos um rendimento líquido, cujo valor é $C.(1+i)^n - d.\big[C.(1+i)^n - C\big] - C = C.\big[(1+i)^n.(1-d) + d - 1\big]$. Logo, $j = (1+i)^n.(1-d)+d-1$ é a taxa que representa a rentabilidade líquida do investimento.

A unidade periódica de j é n, pois esta taxa incide uma única vez sobre C para o cálculo do rendimento após n períodos de i.

Obtenhamos então a rentabilidade líquida j, ao período de 5 anos, de cada modalidade de investimento enunciada no problema:

- A poupança tem $j = (1+4{,}69\%)^5.(1-0\%) + 0\% - 1 \cong 0{,}2575521 = 25{,}75521\%$;
- O CDB tem $j = (1+5{,}53\%)^5.(1-15\%) + 15\% - 1 \cong 0{,}2624964 = 26{,}24964\%$;
- O Tesouro tem $j = (1+8{,}31\%)^5.(1-18\%) + 18\% - 1 \cong 0{,}4022404 = 40{,}22404\%$;
- A LCI tem $j = (1+4{,}97\%)^5.(1-0\%) + 0\% - 1 \cong 0{,}2744593 = 27{,}44593\%$;
- O Fundo DI tem $j = (1+5{,}67\%)^5.(1-16\%) + 16\% - 1 \cong 0{,}2667202 = 26{,}67202\%$.

Confirmamos assim a resposta anterior, pois a maior rentabilidade líquida é a do Tesouro e a menor é a da Poupança.

Interessante verificar que o produto de cada j por 1000 resulta no rendimento de cada modalidade.

Uma observação final: cada taxa j equivale à taxa anual j_a tal que $(1+j_a) = (1+j)^{1/5}$. Assim, para qualquer prazo n (em anos), obtemos o seguinte montante líquido da aplicação de C reais: $M\big(C\,;j_a;n\big) = C.(1+j_a)^n = C.(1+j)^{n/5}$.

Por exemplo, o título do Tesouro Nacional tem rentabilidade líquida anual $j_a \cong (1+40{,}22404\%)^{1/5} - 1 \cong 0{,}0699525 = 6{,}99525\%$. Verifica-se que $1000.(1+6{,}99525\%)^5 \cong 1402{,}24$. Esta informação será útil para a próxima atividade.

5.5 Quinta atividade: A.5

Esta atividade é uma continuidade da anterior. Desta vez, Maria se vê diante de outra possibilidade de investimento financeiro com variadas movimentações e precisa analisar a sua viabilidade no contexto do Capítulo 3.

5.5.1 Enunciado da quinta atividade

A.5 Há cinco anos, Maria aplicou 1000 reais em um título do Tesouro Nacional, com rentabilidade líquida de 7% ao ano.

Agora ela recebe a proposta de investir seu dinheiro no projeto X. Este projeto consiste na aquisição de um equipamento que custa 1400 reais e gera anualmente rendas líquidas de $(300 + 10.n)$ reais, com n em anos inteiros, tal que $n \leq 10$.

O equipamento exige ainda manutenção de 500 reais a cada 3 anos e sofre depreciação de 10% por ano.

Como após 10 anos de uso, o equipamento começa a reduzir sua produtividade, este investimento é previsto para durar 10 anos.

Outra informação importante é que Maria considera inviável qualquer investimento que leve mais da metade da sua duração para ser reembolsado.

Determine se o projeto X é viável pelo VPL, pela TIR e pelo PBD.

5.5.2 Soluções da quinta atividade

A solução desta atividade se divide em duas etapas. A primeira é descobrir quanto Maria acumulou com a sua aplicação no Tesouro, para saber se ela dispõe da quantia necessária para investir no projeto X. A segunda é analisar se o projeto X é viável ou não a partir do seu VPL, da sua TIR e do seu PBD.

Pela atividade **A.4**, já sabemos que o investimento de R$ 1000 em um título do Tesouro com rentabilidade líquida de 6,99525% ao ano gera R$ 1402,24 após 5 anos. Logo, Maria tem dinheiro suficiente para investir no projeto X, o qual exige o desembolso inicial de R$ 1400.

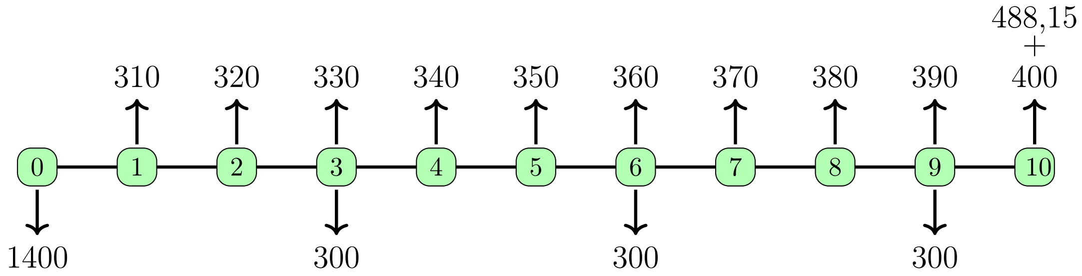
Sigamos para a segunda etapa da solução.

Para iniciar a análise do projeto X, construiremos seu diagrama de fluxo de caixa (figura 5.17). Para isto, determinemos todas as suas movimentações financeiras.

As despesas são quatro: o investimento inicial de R$1400 mais três manutenções de R$ 300 no 3º, no 6º e no 9º ano.

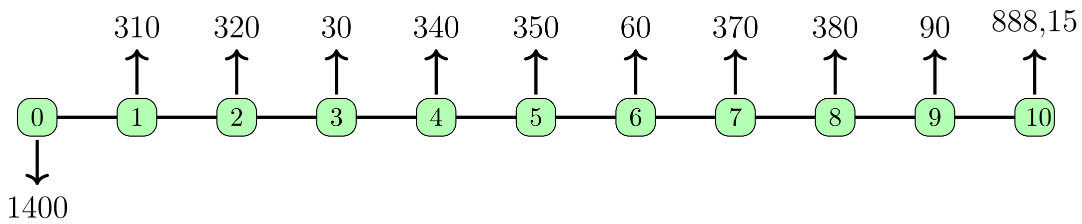
As receitas são dez rendas anuais da PA (R\$ 310; R\$ 320; R\$ 330; ...; R\$ 400) mais um valor extra no final do projeto X, oriundo da venda do equipamento depreciado anualmente a 10%. Com base no teorema **T-2.1**, este valor residual corresponde ao montante $M(1400; -10\%; 10) = 1400.(1-10\%)^{10} \cong 488{,}15$.

Figura 5.17: Fluxo de caixa do projeto X.



Podemos simplificar o diagrama acima adicionando movimentações financeiras da mesma data. Fazendo isto, obtemos a figura abaixo.

Figura 5.18: Fluxo de caixa do projeto X simplificado.



Observemos ainda que a taxa de 7% ao ano da aplicação no Tesouro corresponde à taxa mínima de atratividade: TMA.

Assim, temos:

- $VPL = \frac{310}{(1{,}07)} + \frac{320}{(1{,}07)^2} + \frac{30}{(1{,}07)^3} + \frac{340}{(1{,}07)^4} + \frac{350}{(1{,}07)^5} + \frac{60}{(1{,}07)^6} + \frac{370}{(1{,}07)^7} + \frac{380}{(1{,}07)^8} + \frac{90}{(1{,}07)^9} + \frac{888{,}15}{(1{,}07)^{10}} - 1400;$
- $\frac{310}{(1+i)} + \frac{320}{(1+i)^2} + \frac{30}{(1+i)^3} + \frac{340}{(1+i)^4} + \frac{350}{(1+i)^5} + \frac{60}{(1+i)^6} + \frac{370}{(1+i)^7} + \frac{380}{(1+i)^8} + \frac{90}{(1+i)^9} + \frac{888{,}15}{(1+i)^{10}} - 1400 = 0;$
- $k-1 < PBD \leq k$, $VPL_{k-1} < 0 \leq VPL_k$.

No primeiro tópico acima, as parcelas positivas constituem o valor presente dos rendimentos líquidos anuais; no segundo, temos $i = TIR$; no terceiro, VPL_k é o valor presente líquido até o ano k.

O exaustivo trabalho de efetuar todas estas contas manualmente será eliminado pelo uso do Excel.

Construímos então a planilha de fluxo de caixa do projeto X (figura 5.19), de modo análogo à construção da figura 4.7 do Capítulo 4.

Figura 5.19: Planilha Excel de fluxo de caixa do projeto X.

	A	B	C	D
1	k	FC_k	$VP(FC_k;7\%)$	VPL_k
2	0	-R$ 1.400,00	-R$ 1.400,00	-R$ 1.400,00
3	1	R$ 410,00	R$ 383,18	-R$ 1.016,82
4	2	R$ 420,00	R$ 366,84	-R$ 649,98
5	3	R$ 130,00	R$ 106,12	-R$ 543,86
6	4	R$ 440,00	R$ 335,67	-R$ 208,19
7	5	R$ 450,00	R$ 320,84	R$ 112,66
8	6	R$ 160,00	R$ 106,61	R$ 219,27
9	7	R$ 470,00	R$ 292,69	R$ 511,97
10	8	R$ 480,00	R$ 279,36	R$ 791,33
11	9	R$ 190,00	R$ 103,35	R$ 894,68
12	10	R$ 888,15	R$ 451,49	R$ 1.346,17

Depois, formulamos =TIR(B2:B12), =VPL(7%; B3:B12) - 1400 e =4 - D6/C7 para calcular, respectivamente, a $TIR \cong 23{,}5\%$ ao ano, o $VPL \cong$ R$ 1346,17 e o $PBD \cong 4{,}65$ anos.

Note que o projeto X cumpre todas as condições de viabilidade. A principio, temos $TIR > TMA$ e $VPL > 0$. Além disto, Maria estabelece que o prazo para reembolsar seu investimento deve ser menor que a metade dos 10 anos de duração do projeto. Esta condição també é atendida porque $4 < PBD < 5$. Portanto, é viável para Maria investir no projeto X.

5.6 Sexta atividade: A.6

Esta atividade trata de orçamento familiar. Ela se baseia no uso do Excel, mas também pode ser desenvolvida sem ele, com algumas adaptações e um esforço extra por parte do aluno.

O objetivo principal é exercitar a identificação de receitas e despesas diárias em um fluxo de caixa mensal, bem como o cálculo de seus saldos periódicos a cada dia.

5.6.1 Enunciado da sexta atividade

A.6 Represente as receitas e as despesas de Sara em uma planilha Excel constituída de quatro colunas e trinta e uma linhas, conforme as explicações seguintes.

A linha 1 deve ter os nomes DATA, DESCRIÇÃO, VALOR e SALDO, nas células A1, B1, C1 e D1, respectivamente.

Os dias a serem inseridos na coluna A devem variar de 1 a 30. Subentende-se que todos os dias se referem ao mesmo mês do mesmo ano.

As descrições das movimentações financeiras a serem inseridas na coluna B e seus valores relativos da coluna C serão mencionados a seguir. Cada receita deve ser registrada como valor positivo e cada despesa como valor negativo.

- No dia primeiro, deve ser registrado o saldo anterior de R$ 1000,00, decorrente da economia que Sara conseguiu fazer no mês passado. Assim como há uma só receita neste dia, o movimento financeiro é único em cada dia posterior (esta é apenas uma hipótese adotada aqui para facilitar o exercício).
- Sara tem gastos diários em torno de R$ 25,00, com alimentação, transporte e outros, que devem ser somados e computados no segundo dia do mês.
- O salário de Sara é R$ 3000,00 e ela recebe no dia 5. Seis dias depois tem um bônus pecuniário de R$ 500,00.
- Sara precisa desembolsar no dia 10 a quantia de R$ 450,00 para pagar contas de água, luz, telefone, internet e outras, além de R$ 1500,00 para o aluguel e R$ 250,00 para o cartão de crédito que vencem dia 12 e dia 20, nesta ordem.
- O plano de saúde de Sara, no valor de R$ 400,00, tem vencimento no dia 14.
- Existem ainda dois gastos de R$ 200,00 com supermercado, que Sara faz de 15 em 15 dias, sendo um deles no dia 8.
- Ao se aproximar o fim do mês, Sara destina parte das suas economias para doações e para seu lazer.
- No dia 25, ela doa 10% do dinheiro economizado até esta data para uma instituição de caridade.
- Sara usa R$ 80,00 para alguma forma de diversão saldável (geralmente, um passeio ou um jantar), que costuma realizar no 28.

Suponha que o orçamento de Sara seja sempre o mesmo e que ela necessite desembolsar R$ 972,22 no último dia de certo mês para tratar a saúde da sua mãe, que adoeceu repentinamente. O que Sara pode fazer?

5.6.2 Soluções da sexta atividade

Esta atividade se divide em duas partes. A 1ª parte é a construção objetiva da planilha Excel referente ao orçamento de Sara. A 2ª parte consiste em conjecturar maneiras de resolver um problema financeiro inesperado.

Solução da 1ª parte de A.6

Começamos fazendo o cabeçalho da planilha seguindo as instruções enunciadas. Em seguida, inserimos 1 em A2 e 2 em A3, selecionamos estas células e "arrastamos" até A31.

Utilizamos "Formato de Número de Contabilização" de C2 até D31 para padronizar os valores monetários com R$ e duas casas decimais.

O próximo passo é identificar as únicas três receitas de Sara: saldo anterior, salário e bônus. Consequentemente, o sinal negativo deve ser atribuído a todas as outras movimentações financeiras. Ressaltamos que se deve formular =10%*D25 em D26.

Finalmente, inserimos 1000 em D2 e =D2 + C3 em D3, e copiamos esta fórmula pelo "método de arrasto" até D31.

Figura 5.20: Planilha Excel do orçamento de Sara.

	A	B	C	D
1	DATA	DESCRIÇÃO	VALOR	SALDO
2	1	saldo anterior	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
3	2	gastos diários	-R$ 750,00	R$ 250,00
4	3			R$ 250,00
5	4			R$ 250,00
6	5	salário	R$ 3.000,00	R$ 3.250,00
7	6			R$ 3.250,00
8	7			R$ 3.250,00
9	8	supermercado	-R$ 200,00	R$ 3.050,00
10	9			R$ 3.050,00
11	10	contas	-R$ 450,00	R$ 2.600,00
12	11	bônus	R$ 800,00	R$ 3.400,00
13	12	aluguel	-R$ 1.500,00	R$ 1.900,00
14	13			R$ 1.900,00
15	14	plano de saúde	-R$ 350,00	R$ 1.550,00
16	15			R$ 1.550,00
17	16			R$ 1.550,00
18	17			R$ 1.550,00
19	18			R$ 1.550,00
20	19			R$ 1.550,00
21	20	cartão de crédito	-R$ 150,00	R$ 1.400,00
22	21			R$ 1.400,00
23	22			R$ 1.400,00
24	23	supermercado	-R$ 200,00	R$ 1.200,00
25	24			R$ 1.200,00
26	25	doações	-R$ 120,00	R$ 1.080,00
27	26			R$ 1.080,00
28	27			R$ 1.080,00
29	28	lazer	-R$ 80,00	R$ 1.000,00
30	29			R$ 1.000,00
31	30			R$ 1.000,00

Observemos que Sara se organiza de tal forma que o seu saldo sempre fique positivo. A ocorrência de saldo negativo em algum dia significa atraso em um pagamento. Isto pode acarretar outras despesas com juros moratórios. Por isto, o melhor é evitar sempre um saldo negativo.

Solução da 2ª parte de A.6

Uma primeira forma de conseguir dinheiro extra seria vender um bem que não seja essencial. Mas, mesmo que se tenha algo disponível para venda no valor desejado, dificilmente se conseguiria um comprador de imediato.

Descartando a opção acima, vejamos outras maneiras de Sara pagar os R$ 972,22 referentes ao tratamento de saúde de sua mãe.

Utilizando o cartão de crédito num pagamento único, o valor do tratamento seria acrescido na fatura do dia 20 do mês seguinte. Neste dia, o desembolso seria de R$ 1122,22 (esta é a soma de 150 com 972,22).

Fazendo a mudança no seu orçamento, Sara fecharia o mês com R$ 125 de saldo. Além disto, ela permaneceria sem ocorrência de saldo negativo ao longo do mês.

Entretanto, R$ 125 são insuficientes para cobrir todas as despesas diárias que Sara registraria no dia 2 do mês seguinte: −R$ 750. Para evitar saldos negativos neste início de mês, Sara deverá fazer alguns ajustes.

Ela poderia registrar −R$ 125 no dia 2, para custear os gastos diários referentes aos primeiros 5 dias do mês, e −R$ 625 no dia 6, depois de ter recebido seu salário, a fim de suprir os gatos dos outros 25 dias do mês.

Desta forma, ela fecharia o mês com R$ 212,50 e repetiria o método anterior para pagar suas despesas diárias do próximo mês. Assim, o saldo final do terceiro mês seria R$ 291,25 e o orçamento continuaria livre de saldos negativos.

Os saldos mensais de Sara cresceriam a partir daí, o que garante a viabilidade desta forma de pagamento.

Outra opção seria parcelar o pagamento anterior para amenizar o peso da despesa. Supondo que se possa dividir os R$ 972,22 em apenas duas vezes sem juros, Sara pagaria R$ 486,11 nos dois meses seguintes, junto das despesas habituais com cartão, registrando −R$ 636,11 no dia 20. Assim, o saldo final do mês seria R$ 562,50. Este passa a ser o saldo inicial do próximo mês.

Novamente, no dia 2, Sara não teria os R$ 750 para suas despesas diárias. Procedendo da mesma maneira descrita anteriormente, ela pagaria R$ 125 no dia 2 e R$ 625 no dia 6.

Após o pagamento da segunda parcela de R$ 486,11, o respectivo mês fecharia com R$ 168,30.

Quitada a dívida, repetimos o procedimento do mês passado e obtemos o saldo final do terceiro mês igual a R$ 251,88. O comportamento crescente do saldo evidencia que esta opção também é viável. Porém, a opção anterior é mais vantajosa financeiramente, pois seu saldo no terceiro mês é maior.

Vejamos uma terceira maneira de pagar a dívida de R$ 972,22. Como Sara dispõe de R$ 1000 no dia 30 do mês, ela poderia utilizar parte desta quantia para pagar o tratamento de saúde da sua mãe. Por este pagamento à vista, provavelmente, Sara conseguiria algum desconto.

Digamos que seja dado o desconto habitual de 10%. Assim, Sara pagaria R$ 875 (valor aproximado de 90% de R$ 972,22).

O mês seguinte iniciaria com saldo de R$ 125. De modo análogo, ao que descrevemos antes, seriam feitos os registros de −R$ 125 no dia 2 e de −R$ 625 no dia 6. O orçamento segue sem saldo negativo e fecha em R$ 212,50.

Sara repetiria o procedimento para pagar suas despesas diárias e fecharia o mês seguinte com R$ 291,25. Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos R$ 362,13 no final do terceiro mês. Logo, esta opção de pagamento é a mais vantajosa das três.

Apresentamos acima apenas algumas das muitas respostas possíveis. Sara também poderia conseguir a quantia extra pedindo um adiantamento de parte do seu salário ou do bônus que recebe dia 11 e cortando gastos (a começar pelo lazer, pois é o menos importante).

Observações finais para A.6

Anteriormente, não consideramos a opção de um empréstimo porque existem outras formas de Sara conseguir arcar com a despesa extra de R$ 972,22 para cuidar da sua mãe, sem precisar se endividar. Porém, se Sara precisasse de mais dinheiro, seria obrigada a contrair alguma dívida.

Por exemplo, o que aconteceria se a despesa extra se repetisse? O que fazer para evitar ou, pelo menos, minimizar endividamentos? A resposta óbvia é ter mais dinheiro, mas como consegui-lo?

Existem, basicamente, duas formas de se conseguir dinheiro extra: reduzir despesas e aumentar receitas. Obviamente, os últimos cortes de gastos a se pensar devem ser aqueles que são prioritários, como alimentação e moradia. Também é óbvio que a busca por mais entradas de caixa deve ocorrer de modo honesto, sem ultrapassar os limites legais. Neste contexto, inserem-se os investimentos financeiros.

Notemos que, antes da doença da mãe, Sara poderia ter investido mensalmente parte do seu dinheiro excedente ao findar o mês. O dinheiro aplicado renderia juros que seriam cruciais para deixar Sara mais tranquila quando houvesse uma necessidade financeira urgente, como no caso do tratamento de sua mãe.

Daí a importância de se construir uma reserva de emergência. Para tal, recomenda-se uma aplicação financeira segura e de liquidez elevada (em geral, títulos de renda fixa). Formada esta a reserva, o investidor deve começar a diversificar sua a carteira de investimentos, buscando por maiores rentabilidades a longo prazo.

5.7 Sétima atividade: A.7

Após pesquisarmos 450 questões de dez provas de Matemática e suas Tecnologias do ENEM realizadas de 2011 a 2020 (INEP, [2021?]), encontramos a palavra "juros" em apenas quatro questões das aplicações regulares deste exame. Decidimos então agrupar estas raridades na presente atividade.

Existem outras questões do ENEM relacionadas com a MF, mas a maioria pode ser resolvida sem conhecimentos específicos desta área do conhecimento. Escolhemos as questões que mencionam juros porque o juro é o principal conceito da MF.

Não enunciamos explicitamente estas questões na subseção 5.7.1, como forma de estimular o aluno à pesquisa. Por isto, os enunciados destas questões serão exibidos apenas nas soluções (subseção 5.7.2).

5.7.1 Enunciado da sétima atividade

A.7 Resolva as questões do ENEM itemizadas abaixo:

(a) Questão 152 do Caderno Amarelo da prova de Matemática de suas Tecnologias do ENEM 2015 - aplicação regular.

(b) Questão 144 do Caderno Amarelo da prova de Matemática de suas Tecnologias do ENEM 2017 - aplicação regular.

(c) Questão 165 do Caderno Amarelo da prova de Matemática de suas Tecnologias do ENEM 2018 - aplicação regular.

(d) Questão 154 do Caderno Amarelo da prova de Matemática de suas Tecnologias do ENEM 2019 - aplicação regular.

5.7.2 Soluções da sétima atividade

Nas soluções desta atividade, seguiremos a identificação das questões do ENEM pelos itens **(a)**, **(b)**, **(c)** e **(d)**, cujos enunciados estão representados nas figuras 5.21, 5.24, 5.26 e 5.28 a seguir.

Solução para o item (a) de A.7

Figura 5.21: Questão do ENEM 2015 (INEP, [2021?]).

QUESTÃO 152

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

A 2 075,00.
B 2 093,00.
C 2 138,00.
D 2 255,00.
E 2 300,00.

O item **(a)** é uma questão do ENEM 2015 que trata do financiamento de R$ 180000 em 360 prestações mensais com taxa de juros efetiva de 1% ao mês.

O fato de a primeira prestação se paga um mês após a liberação dos recursos significa que estamos diante de uma sequência de pagamentos postecipados.

Como o valor da prestação mensal é de R$ 500 mais o juros de 1% sobre o saldo devedor, então o sistema de amortizações utilizado é o SAC, onde cada amortização vale R$ 500. Isto é confirmado pela observação que, "a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500".

Além disto, não há prestação em atraso, ou seja, todos os pagamentos foram efetuados na data combinada.

Para determinarmos o valor da décima prestação, basta obtermos o saldo devedor do nono mês $S_9 = 180000 - 9.500 = 175500$ e calcularmos os juros do décimo mês sobre ele: $J_{10} = (1\%).175500 = 1755$. Daí, a décima prestação é $P_{10} = 500 + 1755 = 2255$. Logo, a alternativa correta é a letra "D".

Note que o teorema **T-3.2** do Capítulo 3 está implícito nas contas acima. Logo, esta questão pode ser utilizada para introduzi-lo ou para aplicá-lo. Pelo item (d) do referido teorema, obtemos diretamente $P_{10} = 500 + (1\%).\big[180000 - (10-1).500\big] = 2255$.

Aproveitemos o ensejo para esboçar o diagrama de fluxo de caixa deste financiamento (figura 5.22) e construir a respectiva tabela SAC no Excel (figura 5.23).

Figura 5.22: Fluxo de caixa, onde $P_k = 500 + (1\%).\big[180000 - (k-1).500\big]$.

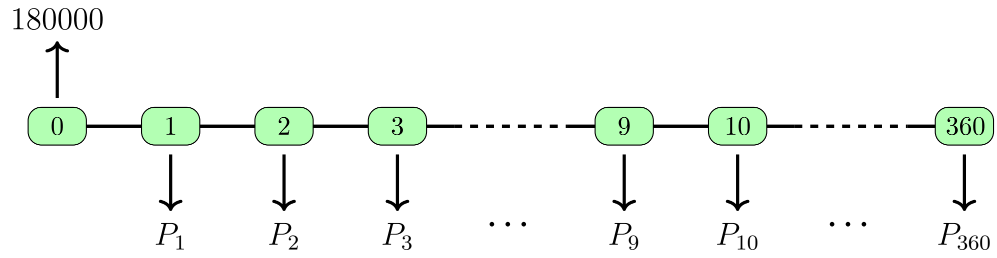


Figura 5.23: Recorte de tabela SAC no Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Dados iniciais:**	i =	1%	n =	360	S_0 =	R$ 180.000,00
2							
3	**Tabela SAC**		**k**	**S_k**	**A_k**	**J_k**	**P_k**
4			0	R$ 180.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
5	**S**istema de		1	R$ 179.500,00	R$ 500,00	R$ 1.800,00	R$ 2.300,00
6	**A**mortizações		2	R$ 179.000,00	R$ 500,00	R$ 1.795,00	R$ 2.295,00
7	**C**onstantes		3	R$ 178.500,00	R$ 500,00	R$ 1.790,00	R$ 2.290,00
8			4	R$ 178.000,00	R$ 500,00	R$ 1.785,00	R$ 2.285,00
9			5	R$ 177.500,00	R$ 500,00	R$ 1.780,00	R$ 2.280,00
10			6	R$ 177.000,00	R$ 500,00	R$ 1.775,00	R$ 2.275,00
11			7	R$ 176.500,00	R$ 500,00	R$ 1.770,00	R$ 2.270,00
12			8	R$ 176.000,00	R$ 500,00	R$ 1.765,00	R$ 2.265,00
13			9	R$ 175.500,00	R$ 500,00	R$ 1.760,00	R$ 2.260,00
14			10	R$ 175.000,00	R$ 500,00	R$ 1.755,00	R$ 2.255,00
15			11	R$ 174.500,00	R$ 500,00	R$ 1.750,00	R$ 2.250,00
16			12	R$ 174.000,00	R$ 500,00	R$ 1.745,00	R$ 2.245,00
17			13	R$ 173.500,00	R$ 500,00	R$ 1.740,00	R$ 2.240,00
18			14	R$ 173.000,00	R$ 500,00	R$ 1.735,00	R$ 2.235,00
⋮			⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
354			350	R$ 5.000,00	R$ 500,00	R$ 55,00	R$ 555,00
355			351	R$ 4.500,00	R$ 500,00	R$ 50,00	R$ 550,00
356			352	R$ 4.000,00	R$ 500,00	R$ 45,00	R$ 545,00
357			353	R$ 3.500,00	R$ 500,00	R$ 40,00	R$ 540,00
358			354	R$ 3.000,00	R$ 500,00	R$ 35,00	R$ 535,00
359			355	R$ 2.500,00	R$ 500,00	R$ 30,00	R$ 530,00
360			356	R$ 2.000,00	R$ 500,00	R$ 25,00	R$ 525,00
361			357	R$ 1.500,00	R$ 500,00	R$ 20,00	R$ 520,00
362			358	R$ 1.000,00	R$ 500,00	R$ 15,00	R$ 515,00
363			359	R$ 500,00	R$ 500,00	R$ 10,00	R$ 510,00
364			360	R$ -	R$ 500,00	R$ 5,00	R$ 505,00

Para a construir a planilha anterior, basta substituir os dados iniciais da planilha apresentada no Capítulo 4 (figura 4.5) e utilizar o "método do arrasto" para copiar sistematicamente as informações das células C5, D5, E5, F5 e G5 até a linha 364. Confirmamos nesta planilha que $P_{10} = 2255$, pois este é o valor da célula G14.

Solução para o item (b) de A.7

Figura 5.24: Questão do ENEM 2017 (INEP, [2021?]).

QUESTÃO 144

Um empréstimo foi feito à taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

A) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$

B) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{2i}{100})}\right]$

C) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$

D) $P\left[\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{2i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{3i}{100})}\right]$

E) $P\left[\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^3}\right]$

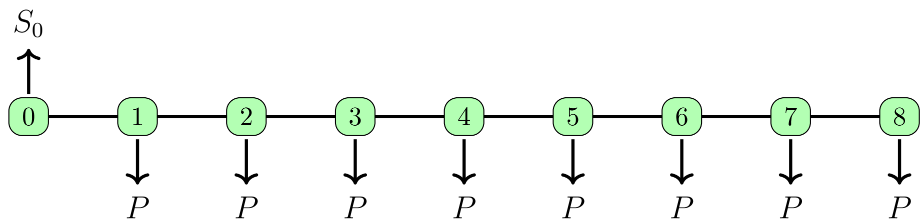
O item **(b)** é uma questão do ENEM 2017 absolutamente algébrica, que aborda a temática do desconto de título de débito, decorrente da sua antecipação. Mas, para resolvê-la, basta utilizar o conhecimento básico da MF sobre como deslocar valores monetários no tempo.

Em particular, será necessário realizar deslocamentos para o passado.

Esta questão pode ser trabalhada em um contexto introdutório da MF, em meio ao estudo do regime de juros compostos (Capítulo 2) ou na abordagem das sequências de pagamentos (Capítulo 3).

Vejamos o diagrama de fluxo de caixa que representa a situação enunciada nesta questão.

Figura 5.25: Fluxo de caixa de um empréstimo pago em 8 mensalidades de valor P.



O valor S_0 representado no diagrama acima é o saldo inicial, que corresponde à quantia tomada emprestada. Como este valor não será utilizado para resolver o problema, ele sequer foi mencionado. Mas grafamos ele aqui para uma observação que faremos no final desta solução.

De acordo com o enunciado, o empréstimo opera com a taxa $i\%$ ao mês de juros compostos e o devedor resolve quitar sua dívida no 6º mês, ou seja, ele antecipará o pagamento das duas últimas mensalidades. Por esta antecipação, haverá um desconto racional composto, calculado "por dentro" pela taxa mensal $i\%$, isto é, valores futuros serão deslocados para o passado, mediante o fator de descapitalização mensal $1/(1+i\%)$.

Consideremos que todos os pagamentos até o 5º mês tenham sido efetuados sem atraso (faltou isto ficar claro no enunciado da questão). Assim, o valor a ser pago no 6º mês (data focal) para quitar o empréstimo é a soma de P (valor atual da 6ª mensalidade) com $P/(1+i\%)$ (valor atual da 7ª mensalidade) e $P/(1+i\%)^2$ (valor atual da 8ª mensalidade), ou seja, o desembolso necessário para a quitação no 6º mês é $P+P/(1+i\%)+P/(1+i\%)^2$.

Evidenciando P e reescrevendo $i\% = i/100$ na expressão acima, concluímos que a alternativa correta é a letra "A".

Observemos ainda que $S_0 = \sum\limits_{k=1}^{8} P/(1+i\%)^k$, onde $i\%$ ao mês denota o custo do empréstimo, ou seja, é a sua TIR.

Solução para o item (c) de A.7

Figura 5.26: Questão do ENEM 2018 (INEP, [2021?]).

QUESTÃO 165

Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1+i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para ln (1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

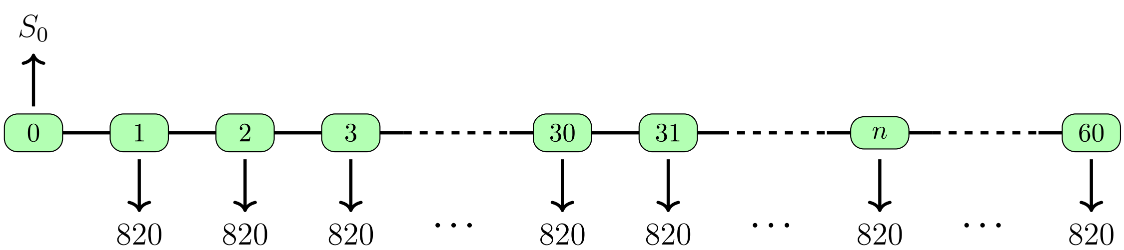
A) 56ª
B) 55ª
C) 52ª
D) 51ª
E) 45ª

O item **(c)** é uma questão do ENEM 2018 que trata novamente do pagamento antecipado de uma prestação, mediante um desconto calculado no regime de juros compostos.

O enunciado já fornece a fórmula $V = P.(1+i)^n$, onde P é o valor presente submetido a juros compostos com taxa i, que, após n períodos de i, produz o valor futuro V. Esta fórmula equivale ao teorema **T-2.1**, mas, no contexto da questão, P é o valor atual da prestação, cujo valor nominal na data do seu vencimento é V.

Temos um empréstimo com taxa de juro mensal 1,32% e o fluxo de caixa abaixo.

Figura 5.27: Fluxo de caixa de um empréstimo pago em 60 mensalidades de 820 reais.



Outros dados do problema são que junto com a trigésima prestação, será paga antecipadamente outra, desde que o desconto supere 25% do seu valor. Assim, o valor da prestação antecipada deve ser $P \leq (75\%).820 = 615$.

A questão pede a posição $30+n$ da primeira das prestações que poderá ser antecipada junto com a 30ª, tal que $820 = 615.(1 + 1{,}32\%)^n$. Multiplicando os dois membros por $1/615$, obtemos $4/3 = (1{,}0132)^n$.

Observando que foram dados $\ln(4/3) \cong 0{,}2877$ e $\ln(1{,}0132) \cong 0{,}0131$, apliquemos o logaritmo natural na equação anterior: $\ln(4/3) = \ln(1{,}0132)^n$. Daí, $(0{,}2877) \cong n.(0{,}0131)$. Logo, $n \cong (0{,}2877)/(0{,}0131) = 2877/131 \cong 21{,}962$. Nesta ocasião, é recomendável uma visita ao APÊNDICE E.

Para que seja $P \leq 615$, devemos ter $n \geq 21{,}962$. Portanto, $n = 22$, donde concluímos que a prestação a ser antecipada junto com a 30ª é a de posição $30 + 22 = 52$. Assim, a alternativa correta é a letra "C".

Notemos que, para $n = 21$, teríamos $P = 820/(1 + 1{,}32\%)^{21} \cong 622{,}61 > 615$.

Na HP12c, obtemos $n = 22$ teclando:

[f] [CLx] [1] [.] [3] [2] [i] [6] [1] [5] [CHS] [PV] [8] [2] [0] [FV] [n].

Verificamos que a 52ª mensalidade tem, de fato, valor $P \leq 615$, no 30º mês, teclando:

[f] [CLx] [STO] [EEX] [2] [2] [n] [1] [.] [3] [2] [i] [8] [2] [0] [CHS] [FV] [PV].

Obtemos assim R$ 614,50. O resultado é menor que os R$ 615 porque o prazo $n = 22$ é uma aproximação que a HP12c realiza automaticamente, conforme explicamos no Capítulo 4.

Calculamos o valor R$ 622,61 da 51ª mensalidade no 30º mês, teclando:

[f] [CLx] [STO] [EEX] [2] [1] [n] [1] [.] [3] [2] [i] [8] [2] [0] [CHS] [FV] [PV].

Isto prova que a 52ª prestação é realmente a primeira que não supera os R$ 615.

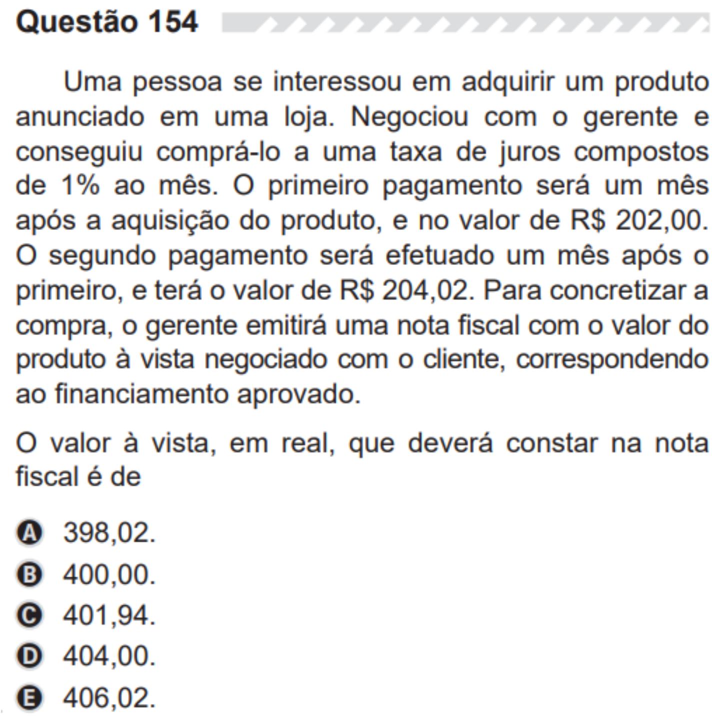
Podemos obter o valor exato do n no Excel pela fórmula =NPER(1,32%; ; 615; -820). O programa retorna 21,93762. Este valor só não coincide precisamente com o primeiro valor obtido para n porque os logaritmos utilizados são aproximações.

Uma planilha Excel também poderia ser construída para representar esse conjunto de fluxos de caixa a partir da 30ª mensalidade, mas isto fica como exercício.

Notemos ainda que o prazo n não depende do valor nominal V da prestação no vencimento e do seu valor atual P quando o pagamento é antecipado. Afinal, é dado que $P \leq (75\%).V$. Assim, basta substituir P por $(3/4).V$ na fórmula enunciada para obter n, ou seja, temos $V = (3/4).V.(1 + 1{,}23\%)^n$, donde $(4/3) = (1{,}0123)^n$. Esta é a mesma equação exponencial obtida antes a partir de $V = 820$ e $P = 615$.

Solução para o item (d) de A.7

Figura 5.28: Questão do ENEM 2019 (INEP, [2021?]).



Questão 154

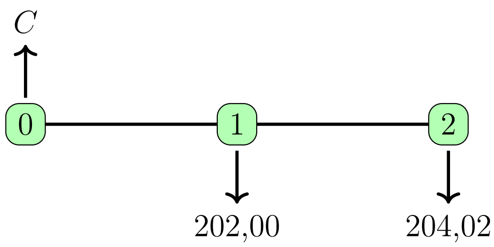
Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

A 398,02.
B 400,00.
C 401,94.
D 404,00.
E 406,02.

O item **(d)** é uma questão do ENEM 2019 que trata mais um vez de parcelamentos. Agora, devemos considerar a cobrança da taxa de juros compostos de 1% ao mês na venda de um produto em duas prestações mensais, sem entrada. Vejamos abaixo o diagrama deste fluxo de caixa.

Figura 5.29: Fluxo de caixa do parcelamento em duas vezes.



Analogamente ao que vimos nas questões anteriores, o valor à vista procurado é $C = 202{,}00/(1+1\%)^1 + 204{,}02/(1+1\%)^2$. Esta conta pode ser rapidamente efetuada com auxílio de uma calculadora, mas o ENEM não admite o uso de recursos tecnológicos. Então, antes de mostrarmos como utilizá-los, vejamos como calcular C sem eles.

Uma maneira seria o cálculo aritmético direto: $C = 202{,}00/(1,01)^1 + 204{,}02/(1{,}01)^2 = 202{,}00/(1{,}01) + 204{,}02/(1{,}0201) = 20200/101 + 2040200/10201 = 200 + 200 = 400$. Porém, com um pouco de álgebra e experiência com porcentagens, podemos resolver de uma forma menos trabalhosa.

É fácil ver que $(1\%).200 = 2$, donde $200.(1+1\%) = 202$, e que $(1\%).202 = 2{,}02$, donde $202.(1 + 1\%) = 204{,}02$. Assim, temos $202{,}00 = 200.(1 + 1\%)^1$ e $204{,}02 = 200.(1 + 1\%)^2$.

Logo, de $C = 202{,}00/(1 + 1\%)^1 + 204{,}02/(1 + 1\%)^2$, obtemos:

$C = 200.(1 + 1\%)^1/(1 + 1\%)^1 + 200.(1 + 1\%)^2/(1 + 1\%)^2 = 200 + 200 = 400.$

Portanto, a alternativa correta é a letra "B".

Na HP12c, obtemos C teclando:

$\boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{CL}x]}\ \boxed{[\mathbf{1}]}\boxed{[\mathbf{i}]}\ \boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}\ \boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{4}]}\boxed{\mathbf{.}]}\boxed{[\mathbf{0}]}\boxed{[\mathbf{2}]}\boxed{[\mathbf{g}]}\boxed{[\mathbf{PMT}]}\ \boxed{[\mathbf{f}]}\boxed{[\mathbf{PV}]}$.

Nesta solução, registramos a taxa de 1% ao mês e os dois fluxos de caixa: 202,00 no primeiro [$\mathrm{CF_j}$] e 204,02 no segundo [$\mathrm{CF_j}$]. Em seguida, solicitamos o valor presente líquido acionando [VPL]. O resultado foi o esperado porque, ao não inserirmos valor algum em [$\mathrm{CF_0}$], consideramos o fluxo de caixa inicial nulo.

Com raciocínio análogo, podemos obter $C = 400$ no Excel pela seguinte fórmula =VPL(1%; 202; 204,02).

5.8 Oitava atividade: A.8

Esta é uma atividade constituída por 8 partes que devem ser desenvolvidas consecutivamente. As partes devem ser apresentadas uma de cada vez e pode ser necessário mais de uma aula para desenvolvê-las.

Esta atividade é propícia para um trabalho à distância, mas também pode ser trabalhada presencialmente.

5.8.1 Enunciado da oitava atividade

A.8 Considere as seguintes hipóteses iniciais:

1) Você tem 12 receitas mensais fixas que somam R$ 4000 a cada mês.

2) Você tem 12 despesas mensais fixas que somam R$ 3000 a cada mês.

3) Você ainda não possui uma reserva de emergência.

Destas hipóteses, serão propostas variadas situações financeiras distribuídas em 8 partes, que exigirão tomadas de decisões, buscando maximizar ganhos e minimizar perdas.

Atente ainda para as regras abaixo.

Primeiramente, cada nota será proporcional ao saldo do 12º mês, no final da atividade. Trataremos deste cálculo em momento oportuno.

Da parte **(1)** até a parte **(7)**,

- quem levar menos de 5 minutos para fazer o que for pedido em cada parte receberá bônus de R$ 500 no respectivo mês;
- quem demorar de 5 a 10 minutos em cada parte receberá bônus de R$ 200 no respectivo mês;
- quem extrapolar 10 minutos para cumprir cada tarefa não será bonificado no respectivo mês.

Na parte **(8)**, quem acertar o cálculo da sua pontuação terá 1 ponto extra. Este ponto não é cumulativo, mas é donativo. O aluno poderá utilizá-lo para si ou doá-lo para um colega. Cada aluno, porém, pode acrescentar apenas 1 ponto extra à sua nota.

As partes que constituem esta atividade estão enumeradas a seguir:

(1) Construa sua planilha orçamentária de 12 meses consecutivos, levando em conta os dados anteriores. No Excel, enumere os meses de 1 a 12 na coluna A, insira as receitas na coluna B, as despesas na coluna C e os saldos acumulados na coluna D.

(2) No final do primeiro mês, aplique seu saldo mensal numa Caderneta de Poupança, com rentabilidade de 0,4% ao mês e liquidez diária. Desta forma, seus saldos do segundo mês em diante serão acrescidos de juros. Para que o Excel calcule automaticamente, será preciso alterar algumas fórmulas da planilha anterior.

(3) No terceiro mês, decida entre comprar um livro à vista por R$ 600 ou a prazo em seis prestações mensais postecipadas e iguais a R$ 101. A opção escolhida deve ser a mais vantajosa. Se escolher a compra à vista, esta será uma nova despesa no mês 3. Se optar pelo parcelamento, acrescente as prestações às despesas dos meses nos quais ocorrerão os pagamentos.

(4) Antes de iniciar o mês 4, escolha do modo mais adequado à sua condição se vai manter seu dinheiro na Poupança ou realocá-lo em uma das alternativas abaixo:

   – Título Federal com rentabilidade líquida de 0,7% ao mês e possibilidade de resgate diário sem desconto pela antecipação;
   – Ações da empresa X com expectativa de rentabilidade líquida em torno de 12% ao ano, capitalizada mensalmente, que tem vencimento no final do ano corrente (cobra-se 10% de multa sobre o valor que for resgatado antecipadamente).

(5) No final do quinto mês, utilize R$ 3900 para algo urgente e inadiável. Explique se o investimento escolhido na parte **(4)** foi ou não foi a melhor opção.

(6) No final do sexto mês, decida entre trocar ou não o seu carro por outro, pagando a diferença de R$ 1000. Considere que os dois carros supram plenamente as suas necessidades e que esta troca acarrete economia de R$ 250 por mês com combustível. A decisão precisa ser a mais vantajosa.

(7) Determine se é melhor receber seu $13^{\underline{o}}$ salário de uma só vez no final do mês 12 ou receber metade no final do mês 7 e metade no final do mês 12. Suponha que 90% da sua receita mensal corresponda ao seu salário.

(8) No último dia do mês 8, venda por R$ 3000 um bem que não tenha utilidade alguma para você e calcule seus pontos de modo proporcional ao saldo do mês 12, sabendo que 10 pontos estão para R$ 19699,27. Considere que não haja novas movimentações financeiras nos meses 9, 10, 11 e 12.

5.8.2 Soluções da oitava atividade

Apresentaremos aqui as soluções das oito partes que irão gerar o maior saldo possível. Este é o saldo que corresponderá à nota máxima 10.

Solução da parte (1) de A.8

Vejamos uma maneira rápida de construir a planilha solicitada. Primeiro redimensionamos as colunas A, B, C e D com largura 15. Em seguida, inserimos `1` em A1, `2` em A2, selecionamos estas células e as copiamos pelo "método do arrasto" até a linha 12. Digitamos então `4000` em B1 e B2, `-3000` em C1 e C2, `1000` em D1 e `=D1 + B2 + C2` em D2. Depois "arrastamos" B2, C2 e D2 até a linha 12 pelo mesmo método anterior.

A planilha apresentada desta forma está correta, mas também é possível acrescentar um cabeçalho, destacar caracteres utilizando cores diferentes, negrito ou itálico, fixar duas casas decimais para valores monetários, acrescentar contornos nas células etc. O mais importante é que o saldo do mês 12 seja 12000 reais.

Conforme uma das regras da atividade, quem acertar esta construção em menos de 5 minutos deverá acrescentar 500 reais no mês 1. Deste modo, a planilha fica como a figura 5.30. Nesta solução, optamos por uma forma bastante básica, na qual omitimos cabeçalho, usamos "Formato de Número de Contabilização" nas células com valores monetários e consideramos valores relativos para receitas e despesas, atribuindo sinal negativo para estas. Uma alternativa seria substituir os sinais por cores diferentes, mas isto iria requerer mudanças nas fórmulas anteriores.

Figura 5.30: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(1)** de **A.8**.

	A	B	C	D
1	1	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 1.500,00
2	2	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 2.500,00
3	3	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 3.500,00
4	4	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 4.500,00
5	5	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 5.500,00
6	6	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 6.500,00
7	7	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 7.500,00
8	8	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 8.500,00
9	9	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 9.500,00
10	10	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 10.500,00
11	11	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 11.500,00
12	12	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 12.500,00

Solução da parte (2) de A.8

A partir desta parte, realizamos apenas alterações na planilha anterior decorrentes das movimentações financeiras enunciadas. Na parte **(2)**, basta substituirmos a fórmula da célula D2 por =D1*1,004 + B2 + C2 e copiarmos por "arrasto" até D12.

Note que multiplicamos D1 por 1,004 porque o saldo anterior R$ 1500 renderá 0,4% até completar o 2º mês, devido à aplicação na Caderneta de Poupança.

Desta forma, o saldo em D12 será R$ 12790,00. Quem encontrá-lo em menos de 5 minutos deverá acrescentar a receita de R$ 500 aos R$ 4000 da célula B2. A planilha ficará como na figura abaixo.

Figura 5.31: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(2)** de **A.8**.

	A	B	C	D
1	1	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 1.500,00
2	2	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 3.006,00
3	3	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 4.018,02
4	4	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 5.034,10
5	5	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 6.054,23
6	6	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 7.078,45
7	7	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 8.106,76
8	8	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 9.139,19
9	9	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 10.175,75
10	10	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 11.216,45
11	11	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 12.261,32
12	12	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 13.310,36

Solução da parte (3) de A.8

Há várias maneiras igualmente rápidas de resolver esta parte. Podemos comparar as duas opções de pagamento a partir de seus valores presentes, do custo do parcelamento, do acréscimo das respectivas despesas à planilha, entre outros modos.

Mediante a taxa de 0,4% ao mês, calculamos o valor presente dos 6 pagamentos postecipados de R$ 101 pela fórmula =VP(0,4%; 6; -101). O resultado R$ 597,61 significa um gasto menor que os R$ 600 da compra à vista. Observamos ainda que 597,61 corresponde a $\sum_{k=1}^{6} 101/\left[1-(1+0{,}4\%)^k\right] \overset{\text{SPG}}{=} 101.\left[1-(1{,}004)^6\right]/(0{,}004)$ (vide **T-3.1**).

Chegaríamos à mesma conclusão calculando a taxa de juro da compra parcelada pela fórmula =TAXA(6; -101; 600). O resultado 0,285% ao mês indica que o custo do parcelamento é menor que o rendimento de 0,4% ao mês da Poupança.

Outra maneira de comparar a compra à vista com a parcelada é analisá-las diretamente na planilha previamente construída. Acrescentando a despesa de R$ 600 no 3º mês, obtemos R$ 12688,41 no 12º mês. Acrescentando R$ 101 nos meses 4, 5, 6, 7, 8 e 9, obtemos R$ 12690,89 no 12º mês. Portanto, realmente vale mais a penas parcelar do que pagar à vista.

Quem tirar esta conclusão, justificando-a de algum dos modos descritos acima ou de outro, em menos de 5 minutos, terá mais R$ 500 no mês 3. Após esta atualização, obtemos a planilha a seguir.

Figura 5.32: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(3)** de **A.8**.

	A	B	C	D
1	1	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 1.500,00
2	2	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 3.006,00
3	3	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 4.518,02
4	4	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 5.435,10
5	5	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 6.355,84
6	6	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 7.280,26
7	7	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 8.208,38
8	8	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 9.140,21
9	9	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 10.075,78
10	10	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 11.116,08
11	11	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 12.160,54
12	12	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 13.209,18

Solução da parte (4) de A.8

Para resolver esta parte, deve ser observado a princípio que não se dispõe de uma reserva de emergência (hipótese inicial 3). Isto significa que o investimento a ser escolhido necessita ser seguro e ter alta liquidez. A Caderneta de Poupança e o Titulo Federal suprem estas necessidades, mas as ações da empresa X não. Logo, esta opção deve ser descartada, apesar de 12% ao ano com capitalização mensal representar 1% ao mês, que é uma rentabilidade maior que as taxas mensais de juros das outras duas aplicações.

Este descarte pode parecer difícil de ser feito devido à tentadora rentabilidade das ações da empresa X, mas é imprescindível. Neste contexto, cabe uma breve reflexão sobre promessas enganosas de ganhos elevados e sem riscos.

Entre a Poupança, que rende 0,4% ao mês, e o Título Federal, que rende 0,7% ao mês, é óbvio que este é mais vantajoso que aquela. Além do fato evidente de o Título Federal ter maior rentabilidade, ele também tem maior segurança do que a Poupança, pois é garantido pelo Governo Federal, em vez do FGC (Fundo Garantidor de Crédito), que é uma instituição privada responsável pela proteção das poupanças, dos CDBs, das LCIs entre outros.

Escolhendo, portanto, o Título Federal, basta alterarmos a fórmula da célula D4 para =D3*1,007 + B4 + C4 e a copiarmos para as oito células abaixo pelo "método de arrasto". O saldo do 12º mês será R$ 13437,17 e quem o obtiver, mediante as justificativas anteriores, em menos de 5 minutos, receberá R$ 500 de bônus a serem acrescidos na célula B4. A planilha resultante está na figura a seguir.

Figura 5.33: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(4)** de **A.8**.

	A	B	C	D
1	1	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 1.500,00
2	2	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 3.006,00
3	3	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 4.518,02
4	4	R$ 4.500,00	-R$ 3.101,00	R$ 5.948,65
5	5	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 6.889,29
6	6	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 7.836,52
7	7	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 8.790,37
8	8	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 9.750,90
9	9	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 10.718,16
10	10	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 11.793,19
11	11	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 12.875,74
12	12	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 13.965,87

Solução da parte (5) de A.8

Esta parte da atividade serve, principalmente, para eliminar qualquer possível dúvida que tenha ficado sobre a parte **(4)**, pois quem tiver escolhido as ações da empresa X sofrerá muito mais do quem não a tiver escolhido. Logo após efetuar o pagamento de R$ 3900 no mês 5, no caso das ações, será cobrada ainda uma multa de R$ 390, que implicará redução no saldo significativamente maior do que nas outras opções, pois elas têm liquidez diária.

Isto porque a inexistência da reserva de emergência obriga que, para cobrir todo gasto extra, quantia seja retirada da aplicação.

Retornando ao caso do investimento no Título Federal, basta realizar duas alterações na planilha. Primeiro a despesa de R$ 3900 vai para a célula C5. Se o aluno obtiver saldo R$ 9870,71 no mês 12, receberá R$ 500 no mês 5. Assim, se chega na tabela a seguir.

Figura 5.34: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(5)** de **A.8**.

	A	B	C	D
1	1	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 1.500,00
2	2	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 3.006,00
3	3	R$ 4.500,00	-R$ 3.000,00	R$ 4.518,02
4	4	R$ 4.500,00	-R$ 3.101,00	R$ 5.948,65
5	5	R$ 4.500,00	-R$ 7.001,00	R$ 3.489,29
6	6	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 4.412,72
7	7	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 5.342,60
8	8	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 6.279,00
9	9	R$ 4.000,00	-R$ 3.101,00	R$ 7.221,96
10	10	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 8.272,51
11	11	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 9.330,42
12	12	R$ 4.000,00	-R$ 3.000,00	R$ 10.395,73

Solução da parte (6) de A.8

Uma despesa de R$ 1000 no 6º mês é coberta pela economia mensal de R$ 250 antes de completar o 10º mês, tendo em vista que o dinheiro está rendendo em uma aplicação financeira. Para verificar isto, basta aumentar a despesa do 6º mês somando −R$ 1000 aos −R$ 3101 da célula C6 e reduzir as despesas das células abaixo (de C7 até C12) em R$ 250. O saldo do 12º mês será R$ 10879,48, um valor maior do que os R$ 10395,73 anteriores (saldo que permaneceria o mesmo no caso de o carro não ser trocado).

Além disto, novamente, haverá o recebimento de bônus de R$ 500. Registrando esta receita no mês 6, a planilha ficará da seguinte forma.

Figura 5.35: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(6)** de **A.8**.

	A	B		C		D	
1	1	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	1.500,00
2	2	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	3.006,00
3	3	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	4.518,02
4	4	R$	4.500,00	-R$	3.101,00	R$	5.948,65
5	5	R$	4.500,00	-R$	7.001,00	R$	3.489,29
6	6	R$	4.500,00	-R$	4.101,00	R$	3.912,72
7	7	R$	4.000,00	-R$	2.851,00	R$	5.089,10
8	8	R$	4.000,00	-R$	2.851,00	R$	6.273,73
9	9	R$	4.000,00	-R$	2.851,00	R$	7.466,64
10	10	R$	4.000,00	-R$	2.750,00	R$	8.768,91
11	11	R$	4.000,00	-R$	2.750,00	R$	10.080,29
12	12	R$	4.000,00	-R$	2.750,00	R$	11.400,86

Solução da parte (7) de A.8

Se não houver desconto pela antecipação de uma receita então, obviamente, devemos antecipá-la. Assim como é óbvio que não se deve antecipar uma despesa sem desconto.

Em particular, é preferível receber o 13º salário, que seria pago inteiramente no mês 12, antecipando a metade para o mês 7. Como o 13º salário é 90% de R$ 4000 então sua metade é R$ 1800. Acrescentamos esta receita ao 7º e ao 12º mês.

Pelo acerto desta solução, recebe-se ainda o bônus de R$ 500 no mês 7. Daí, obtemos a tabela a seguir.

Figura 5.36: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(7)** de **A.8**.

	A	B		C		D	
1	1	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	1.500,00
2	2	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	3.006,00
3	3	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	4.518,02
4	4	R$	4.500,00	-R$	3.101,00	R$	5.948,65
5	5	R$	4.500,00	-R$	7.001,00	R$	3.489,29
6	6	R$	4.500,00	-R$	4.101,00	R$	3.912,72
7	7	R$	6.800,00	-R$	2.851,00	R$	7.889,10
8	8	R$	4.000,00	-R$	2.851,00	R$	9.093,33
9	9	R$	4.000,00	-R$	2.851,00	R$	10.305,98
10	10	R$	4.000,00	-R$	2.750,00	R$	11.628,12
11	11	R$	4.000,00	-R$	2.750,00	R$	12.959,52
12	12	R$	5.800,00	-R$	2.750,00	R$	16.100,24

Solução da parte (8) de A.8

Nesta parte, basta identificarmos a venda como uma receita de R$ 3000 no mês 8 para obtermos o bônus de R$ 500 no mesmo mês. Após o acréscimo destas quantias, chegamos na planilha da figura 5.37.

Figura 5.37: Planilha Excel orçamentária referente à parte **(8)** de **A.8**.

	A	B		C		D	
1	1	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	1.500,00
2	2	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	3.006,00
3	3	R$	4.500,00	-R$	3.000,00	R$	4.518,02
4	4	R$	4.500,00	-R$	3.101,00	R$	5.948,65
5	5	R$	4.500,00	-R$	7.001,00	R$	3.489,29
6	6	R$	4.500,00	-R$	4.101,00	R$	3.912,72
7	7	R$	6.800,00	-R$	2.851,00	R$	7.889,10
8	8	R$	7.500,00	-R$	2.851,00	R$	12.593,33
9	9	R$	4.000,00	-R$	2.851,00	R$	13.830,48
10	10	R$	4.000,00	-R$	2.750,00	R$	15.177,30
11	11	R$	4.000,00	-R$	2.750,00	R$	16.533,54
12	12	R$	5.800,00	-R$	2.750,00	R$	19.699,27

Mas, para encerrar a atividade **A.8**, falta calcular a quantidade de pontos proporcional ao saldo final do mês 12, considerando que não haja novas movimentações financeiras após o 8º mês, além da já acrescida metade do 13º salário no mês 12. Para isto, utilizamos a informação que 10 pontos correspondem ao saldo de R$ 19699,27. Como obtivemos exatamente este saldo então temos a nota máxima 10.

O ato de acertar estes cálculos acarreta 1 ponto extra, que não é cumulativo mas é donativo. Logo, o aluno que obtiver nota 10 poderá doar seu ponto extra para um colega.

Digamos que o aluno errasse apenas a solução da parte **(8)**, considerando que a venda do bem por R$ 3000 fosse uma despesa em vez de uma receita. Desta forma, ele chegaria ao saldo final R$ 13015,35 no 12º mês e sua nota seria x tal que $x/(13015{,}35) = 10/(19699{,}27)$, donde $x \cong 6{,}61$.

Se o aluno acertar este cálculo, terá 1 ponto extra. Caso escolha utilizá-lo para si, ficaria com a nota 7,61. Mas ele poderia se contentar com 6,61 pontos e preferir doar seu ponto para um colega que ficou com nota 5,00. Desta forma, a atividade **A.8** explora também aspectos fraternais que vão muito além da MF.

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho procurou contribuir para o ensino da Matemática Financeira (MF) no Brasil em nível básico, visando corrigir erros, aprimorar acertos e aproximar o aluno do exercício de direitos e deveres que o permita gerenciar bem seus recursos financeiros, isto é, aproximá-lo da "Cidadania Financeira" (BCB, 2018). Destes direitos, obviamente, a educação é priorizada.

Em particular, a educação financeira é mencionada na BNCC (BRASIL, 2018) como algo a ser alcançado mediante o estudo de conceitos de economia e finanças. Além de impulsionar o desenvolvimento de competências dos alunos, este estudo pode se constituir em excelentes contextos para aplicações dos conceitos da MF e proporcionar outros que permitam ampliar e aprofundar tais conhecimentos.

A educação financeira nas escolas deve ser iniciada desde o Ensino Fundamental, mas este trabalho foca no Ensino Médio porque, nesta etapa da vida, o aluno já deverá ter tido experiências financeiras que possibilitem a ele concretizar a MF com maior facilidade, variedade e aprofundamento. Mais precisamente, o momento ideal para abordar a MF, nos moldes deste trabalho, é após o estudo de progressões numéricas, pois elas são seus pré-requisitos básicos. Assim, o 3º ano do Ensino Médio é a série mais indicada para se explorar os principais conteúdos presentes nesta dissertação.

Para o Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) propõe 43 habilidades em Matemática e suas Tecnologias, das quais, pelo menos 10 se relacionam com a MF (vide subseção 1.1.5). Entre elas, interpretar criticamente situações econômicas, com ou sem apoio de tecnologias digitais (EM13MAT101), interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (EM13MAT104), aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas para tomada de decisões (EM13MAT203), interpretar e comparar situações que envolvam juros, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso (EM13MAT303) e resolver problemas com funções exponenciais em contextos da MF (EM13MAT304).

Espera-se que este trabalho possa colaborar significativamente para o desenvolvimento destas e outras habilidades, tais como: associar juros compostos com PG e função exponencial; associar juros simples com PA e função polinomial do 1º grau; e resolver, de modo aritmético, algébrico e tecnológico, variadas questões envolvendo estes regimes, além de situações-problema tratando de capitalização mista, sistemas de amortizações e investimentos financeiros. Tudo isto sempre na busca pela formação do cidadão financeiro.

A fim de atingir os objetivos acima, foram consultados livros, apostilas, manuais, tutoriais, documentos legais, vídeo-aulas e outros materiais, todos devidamente referenciados após estas considerações finais, que serviram de alicerce para a edificação deste trabalho. A partir de uma longa pesquisa bibliográfica e de experiências pessoais ministrando aulas de MF em escolas públicas piauienses, foi elaborada uma sequência didática concisa, precisa e conectada com a realidade, versando sobre os assuntos da MF habitualmente trabalhados no Ensino Médio e outros que, apesar de não serem, também estão muito presentes na vida do cidadão comum.

As motivações para a realização deste trabalho foram mencionadas na sua introdução (Capítulo 1). A principal é a deficiência do ensino da MF no Brasil comprovada, por exemplo, pelos resultados do PISA e pelos elevados números de brasileiros inadimplentes, vítimas de fraudes financeiras e ignorantes quanto aos investimentos disponíveis no mercado.

Outro motivo para se realizar este estudo da MF é a atratividade espontânea dos jovens pelo dinheiro e pela tecnologia. Isto pode ser usado a favor da Matemática, que, frequentemente, é colocada pelos alunos como uma das matérias de menor interesse e maior aversão.

A facilidade de contextualizar questões financeiras e recursos tecnológicos específicos para lidar com elas ao cotidiano dos alunos pode ser um propulsor para a mudança de opinião dos jovens aprendizes em relação à Matemática.

A tecnologia, muito mais do que útil, acessível e atrativa, é indispensável em determinadas situações da MF (vide capítulos 4 e 5). Além disto, o MEC recomenda veementemente o seu uso. Então não existe uma razão lógica que justifique não utilizar recursos tecnológicos em sala de aula.

Após ser estabelecida a temática central desta dissertação, faltava descobrir como diferenciá-la de tantas outras que tratam do mesmo assunto. Em dezembro de 2020, somente no site do PROFMAT identificamos mais de uma centena de dissertações abordando a MF (PROFMAT, [201-]). Nesta pesquisa, não encontramos, porém, menção à "Cidadania Financeira". Assim, um dos primeiros diferenciais buscados com este trabalho foi explorar a MF como ferramenta básica para a construção desta cidadania.

Neste sentido, foi considerada a definição da MF como ramo da Matemática dedicado ao estudo da relação entre o valor do dinheiro e o tempo com o propósito de contribuir para a formação de cidadãos habilitados a viverem num mundo que se tornou ao longo dos anos predominantemente capitalista, tendo em vista que a MF é a "linguagem de alfabetização" para este mundo (CASTELO BRANCO, 2016).

Sobre este alicerce, a MF foi contextualizada sob vários aspectos (social, cultural, histórico, educacional, legal), no Capítulo 1, e, nos capítulos seguintes, foi organizada numa sequência didaticamente coerente com a ocorrência dos assuntos na prática cotidiana. Por isto, os juros compostos foram priorizados e tratados como regra geral, enquanto que os juros simples foram abordados como exceção a esta regra.

Destacam-se como inovações do Capítulo 2, as definições destes dois regimes por recorrência (**D-2.1** e **D-2.2**) e a caracterização da capitalização mista a partir deles. Esta, que raramente é explorada em nível médio, consiste no principal uso da "convenção linear" em cobrança de juros. O teorema associado a ela (**T-2.3**), onde se empregou o conceito de "parte inteira", é uma modelagem matemática inédita na bibliografia consultada.

No Capítulo 3, também se inovou com a unificação de assuntos que costumam ser trabalhados em separado, observando-se que empréstimos e investimentos são essencialmente a mesma operação financeira. A diferença é apenas a perspectiva, que pode ser a do devedor ou a do credor. Neste capítulo, exploramos os conceitos de TIR, VPL, PBD e sistemas de amortização, tudo incluso no estudo das "sequências de pagamentos".

Considerando as recomendações do PISA, do MEC, da ENEF, de grandes especialistas da área e a nossa experiência profissional, optou-se por uma abordagem inicialmente aritmética e algébrica da MF. Além disto, procurou-se, sempre que possível, partir do particular para o geral, ou seja, os conteúdos são introduzidos por exemplos numéricos e alguns deles são generalizados em fórmulas. Os teoremas estão demonstrados ou acompanhados de dicas para tais demonstrações, pois levou-se em conta a necessidade de desenvolver a abstração matemática no Ensino Médio - algo muito difícil de se ver em livros didáticos deste nível.

Posteriormente, no Capítulo 4, exemplos são retomados para novas abordagens utilizando tecnologias digitais. Deste capítulo, destacam-se as metodologias intradisciplinares adotadas e a objetividade das explicações, evidenciando o uso da HP12c e do Excel como facilitadores na resolução de problemas financeiros.

Ainda no contexto das contribuições criativas, vale ressaltar que todos os conceitos, os exemplos, as notações, os esquemas de cores e as figuras, como o diagrama resumo (subseção 2.4.5), os diagramas de fluxo de caixa, as tabelas e os gráficos, foram cuidadosamente pensados para otimizar o processo ensino-aprendizagem. Buscou-se assim, estruturar o trabalho de modo harmonioso, conciliando constantemente a teoria com a prática, a intuição com a formalidade matemática, a parte textual com as ilustrações, esperando, com isto, proporcionar uma leitura o mais agradável possível.

Para finalizar o estudo da MF, no Capítulo 5, foram apresentadas oito atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, que permitem exercitar e avaliar os conhecimentos apreendidos nos capítulos anteriores. As atividades são acompanhadas de diferentes possibilidades resolutivas (aritméticas, algébricas e tecnológicas). A última delas merece atenção especial por algumas de suas características inovadoras, como o fato de explorar o uso do Excel, retomando praticamente todos os assuntos estudados em uma situação que, apesar de hipotética, é absolutamente realista.

A abrangência e a completeza dos conteúdos abordados também pode ser considerada uma inovação desta dissertação. Nas palavras do professor Dr. Manoel Vieira de Matos Neto (UFPI), este trabalho é um “livro de bolso”, um manual muito útil para qualquer professor que pretende ministrar um curso de MF.

Uma observação final é que esta dissertação não encerra os esforços necessários para o aprimoramento e o aprofundamento do ensino da MF nas escolas brasileiras. Ao contrário disto, pretende-se tomar o presente trabalho como ponto de partida para outras pesquisas e para a elaboração de novos materiais.

Referências Bibliográficas

[1] AMORIM, Vitor. **O ensino de matemática financeira**: do livro didático ao mundo real. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_O-ensino-de-Matematica-Financeira.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2021.

[2] ANBIMA: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIROS E DE CAPITAIS. **Raio X do investidor brasileiro**. 4. ed. Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: <https://d335luupugsy2.cloudfront.net/cms/files/43228/1627416739RaioX_Investior-4edicao-27-07.vAtual.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[3] ANDRADE, Thais Marcelle de et al. **Matemática interligada**: grandezas, sequências e matemática financeira. São Paulo: Scipione, 2020.

[4] ARAÚJO, Luiz Jurandir Simões. Matemática Financeira: aula 1: juros. **e-Aulas: Portal de videoaulas da USP**, 2012. Disciplina: Modelagem de risco em finanças e atuária. Vídeo 2 de 11. Disponível em: <https://eaulas.usp.br/portal/video?idItem=2346>. Acesso em: 11 out. 2021.

[5] ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática Financeira e suas aplicações**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

[6] ASSAF NETO, Alexandre. **Investimentos no mercado financeiro usando a calculadora HP12C**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

[7] BALESTRI, Rodrigo. **Matemática**: integração e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 2.

[8] BARROSO, Leônidas C. et al. **Cálculo numérico (com aplicações)**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[9] BASTIAT, Frédéric. **A lei**: por que a esquerda não funciona?: as bases do pensamento liberal. Tradução, introdução e comentários: Eduardo Levy. Barueri, SP: Farol, 2016.

[10] BCB: BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Glossário simplificado de termos financeiros**. Brasília, 2013. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/Informacoes_gerais/glossario_cidadania_financeira.pdf>. Acesso em: 10 set. 2021.

[11] BCB: BANCO CENTRAL DO BRASIL. Glossário. **Portal do Banco Central do Brasil**. Seção Acesso à informação. Brasília, [202-?]. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/acessoinformacao/glossario>. Acesso em: 8 ago. 2021.

[12] BCB: BANCO CENTRAL DO BRASIL. **O que é cidadania financeira?**: definição, papel dos atores e possíveis ações. Brasília, 2018. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/Informacoes_gerais/conceito_cidadania_financeira.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2020.

[13] BCB: BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Portal do Banco Central do Brasil**. Página inicial. Brasília, 2021a. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br>. Acesso em: 6 out. 2021.

[14] BCB: BANCO CENTRAL DO BRASIL. Estudos especiais do Banco Central. **Portal do Banco Central do Brasil**. seção Publicações e pesquisa. Brasília, 2021b. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/publicacoes/estudosespeciais>. Acesso em: 19 set. 2021.

[15] BCB: BANCO CENTRAL DO BRASIL. Remuneração dos depósitos de poupança. **Portal do Banco Central do Brasil**. Brasília, 2021c. Disponível em: <https://www4.bcb.gov.br/pec/poupanca/poupanca.asp?frame=1>. Acesso em: 19 set. 2021.

[16] BÍBLIA sagrada. Tradução dos originais grego, hebraico e aramaico mediante a versão dos Monges Beneditinos de Maredsous (Bélgica). Diretor geral: Marcos Antônio Mendes. 208. ed. São Paulo: Ave Maria, 2016.

[17] BÖHM-BAWERK, Eugene Von. **Teoria positiva do capital**. Tradução: Luiz João Baraúna. São Paulo: Nova Cultural, 1986. v. 1, livros 1-4. Disponível em: <https://portalconservador.com/livros/Eugen-Von-Bohm-Bawerk-Teoria-Positiva-do-Capital.pdf>. Acesso em: 5 set. 2021.

[18] BONJORNO, José Roberto. **Prisma matemática**: sistemas, matemática financeira e grandezas: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. São Paulo: FTD, 2020.

[19] BOYER, Carl B. **História da matemática**.Tradução: Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[20] BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira. **Educação financeira nas escolas**: ensino médio: livro do professor. Brasília, 2013. 3 blocos.

[21] BRASIL. Constituição (1988). Constituição da República Federativa do Brasil. **Portal da Legislação**, Brasília, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm>. Acesso em: 4 set. 2021.

[22] BRASIL. Estratégia Nacional de Educação Financeira. **Portal da ENEF: Estratégia Nacional de Educação Financeira**. [S.l.], c2017. Disponível em: <https://www.vidaedinheiro.gov.br/>. Acesso em: 10 jul. 2021.

[23] BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Portal da Legislação**, Brasília, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 4 set. 2021.

[24] BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular 2018**: educação é a base. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versao final_site.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[25] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[26] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 1999. Parte 3. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[27] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[28] BRASIL. Receita Federal. Instrução normativa RFB nº 1.585, de 31 de agosto de 2015. Dispõe sobre o imposto sobre a renda incidente sobre os rendimentos e ganhos líquidos auferidos nos mercados financeiro e de capitais. **Portal da Receita Federal**, Brasília, 2015. Disponível em: <http://normas.receita.fazenda.gov.br/sijut2consulta/link.action?visao=compilado &idAto=67494#1564214>. Acesso em: 14 set. 2021.

[29] CAMPOS, Roberto. Dois desapontamentos. **Folha de São Paulo**, São Paulo, 2 jan. 2000. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/brasil/fc0201200002.htm>. Acesso em: 5 set. 2021.

[30] CARVALHO, Maurício Gonçalo. Matemática financeira: videoaula. **Portal da OBMEP**, [20--]. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=90#>. Acesso em 26 nov. 2021.

[31] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. MA 12: matemática discreta. **Portal PROFMAT**, [201-]. Seção Videoaulas do PROFMAT. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/ma-12/>. Acesso em: 10 set. 2020.

[32] CARVALHO, Olavo de. **O mínimo que você precisa saber para não ser um idiota**. 9. ed. Rio de Janeiro: Record, 2014.

[33] CARVALHO, T. M.; CYLLENO, P. E. **Matemática comercial e financeira**: complementos de matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: Fename, 1971.

[34] CASTANHEIRA, N. P. **Matemática financeira aplicada**. 3. ed. Curitiba: Ibpex, 2010.

[35] CASTELO BRANCO, Anísio Costa. **Matemática financeira aplicada**: método algébrico, HP-12C e Microsoft Excel. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

[36] CAVALCANTE, Edson. **Como usar o Excel**: guia completo para ser ninja do Excel. [S.l.], 2021. Disponível em: <https://ninjadoexcel.com.br/como-usar-o-excel-guia-completo/>. Acesso em: 14 set. 2021.

[37] CEVADA, Jeferson et al. **Matemática nos dias de hoje**: matemática financeira e álgebra: ensino médio. São Paulo: SEI, 2020.

[38] CHAVANTE, Eduardo. **Quadrante matemática e suas tecnologias**: estatística, probabilidade e matemática financeira. São Paulo: SM, 2020.

[39] CNC: CONFEDERAÇÃO NACIONAL DO COMÉRCIO DE BENS, SERVIÇOS E TURISMO. Divisão Econômica. **Pesquisa nacional CNC**: endividamento e inadimplência do consumidor. Rio de Janeiro, jul. 2021. Disponível em: <https://portal-bucket.azureedge.net/wp-content/2021/08/Graficos_Peic_julho_2021.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[40] CNDL: CONFEDERAÇÃO NACIONAL DE DIRIGENTES LOJISTAS; SPC BRASIL: SERVIÇO DE PROTEÇÃO AO CRÉDITO BRASIL. **Consequências da inadimplência**. [S.l.], out.

2019. Disponível em <https://www.spcbrasil.org.br/wpimprensa/wp-content/uploads/2020/03/Apresenta%C3%A7%C3%A3o-Pesquisa-Perfil-do-Inadimplente-Impacto-Emocional.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[41] CURTY, Carla; MALTA, Maria; BORJA, Bruno. Intérpretes do Brasil: influências na origem do pensamento econômico brasileiro. **Revista História Econômica & História de Empresas**, v. 24, n. 2, p. 463-489, maio-ago. 2021. Disponível em: <https://www.hehe.org.br/index.php/rabphe/article/view/751>. Acesso em: 4 set. 2021.

[42] CVM: COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS. **Portal da Comissão de Valores Mobiliários**, 2021. Página inicial. Disponível em: <https://www.gov.br/cvm/pt-br>. Acesso em: 14 set. 2021.

[43] CVM: COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS. Renda fixa vs renda variável. **Portal do investidor**, [201-]. Disponível em: <https://www.investidor.gov.br/menu/Menu_Investidor/Old/Valores_Mobiliarios.html>. Acesso em: 14 set. 2021.

[44] CVM: COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS. **Relatório da pesquisa com vítimas de fraudes financeiras**. [S.l.], 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/cvm/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/pesquisas/relatorio-pesquisa-fraudes-fin.pdf>. Acesso em: 14 set. 2021.

[45] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações: ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 3.

[46] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em contextos**: estatística e matemática financeira: matemática e suas tecnologias: ensino médio. São Paulo: Ática, 2020.

[47] EKER, T. Harv. **Os segredos da mente milionária**. Rio de Janeiro: Sextante, 2006.

[48] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011. Disponível em: <https://ia903005.us.archive.org/32/items/HistriaDaMatemtica/Hist%C3%B3ria%20da%20Matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em: 9 set. 2021.

[49] ESESP: ESCOLA DE SERVIÇO PÚBLICO DO ESPÍRITO SANTO. **Excel total básico e avançado**: trilha conhecimento em rede. [Vitória]: Governo Estado do Espírito Santo, Secretaria de Gestão e Recursos Humanos, [201-]. Disponível em: <https://esesp.es.gov.br/Media/esesp/Apostilas/APOSTILA%20COMPLETA%20-%20EXCEL%20TOTAL.pdf>. Acesso em: 14 set. 2021.

[50] FERGUSON, Niall. **A ascensão do dinheiro**: a história financeira do mundo. Tradução: Cordelia Magalhães. São Paulo: Planeta do Brasil, 2009. Disponível em: <https://fernandonogueiracosta.files.wordpress.com/2011/10/niall-ferguson-a-ascensc3a3o-do-dinheiro-a-histc3b3ria-financeira-do-mundo.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[51] FERREIRA, Aurélio B. de Holanda. **Dicionário Aurélio da língua portuguesa**. 5. ed. Curitiba: Positivo, 2010.

[52] GRAHAM, Benjamin. **O investidor inteligente**. Rio de Janeiro: Harper Collins Brasil, 2016.

[53] GRANDO, Neiva Ignes; SCHNEIDER, Ido José. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. **Zetetike**, Campinas, v. 18, n. 1, p. 43-62, jan./jun. 2010. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646693>. Acesso em: 5 set. 2021.

[54] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. v. 1.

[55] HILL, Napoleon. **A lei do triunfo**: 16 lições práticas para o sucesso: ensinando, pela primeira vez na história do mundo, a verdadeira filosofia sobre a qual repousa todo o triunfo pessoal. 55. ed. Rio de Janeiro: J. Olympio, 2021.

[56] HP: HEWLETT-PACKARD COMPANY. **HP 12c calculadora financeira**: guia do usuário. 4. ed. San Diego, CA, 2004. Disponível em: <http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/bpia5239.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[57] HP: HEWLETT-PACKARD COMPANY. **Guia de inicialização rápida da calculadora HP 12c**. San Diego, CA, 2008. Disponível em: <http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/c01798127.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[58] IBGE: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Inflação. **Portal do IBGE**, 2021. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php>. Acesso em: 19 set. 2021.

[59] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de matemática elementar 11**: matemática comercial, matemática financeira, estatística. São Paulo: Atual, 2004.

[60] IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

[61] IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: ciência e aplicações: conecte live. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2018. v. 3.

[62] IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[63] INEP: INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS ANÍSIO TEIXEIRA. Avaliações e exames educacionais. **Portal do Inep**. Seção Áreas de Atuação. Brasília, [2021?]. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais>. Acesso em: 4 set. 2021.

[64] INEP: INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS ANÍSIO TEIXEIRA. **Relatório Saeb 2017**. Brasília, 2019. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_saeb_2017.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[65] KIYOSAKI, Robert T. **Pai rico, pai pobre**: o que os ricos ensinam a seus filhos sobre dinheiro. 2. ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2017.

[66] KOSHIBA, Luiz. **História do Brasil no contexto da história ocidental**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2003.

[67] KOTLER, Philip. **Capitalismo em confronto**. Rio de Janeiro: Best Business, 2015.

[68] LEONARDO, Fábio Martins de et al. **Conexões com a matemática**: volume único. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2017.

[69] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**: volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006a.

[70] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006b.

[71] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**: volume 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006c.

[72] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[73] LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[74] LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[75] LIMA, Elon Lages. Novo lançamento da SBM: exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, n. 46, 2001. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/46/10.htm>. Acesso em: 6 set. 2021.

[76] LINHA do tempo. **Portal Stoodi**, 2021. Seção Resumo teórico, História. Disponível em: <https://www.stoodi.com.br/resumos/historia/linha-do-tempo/>. Acesso em: 4 set. 2021.

[77] LONGEN, Adilson. **Interação matemática**: a matemática financeira e a resolução de problemas por meio das funções exponencial e logarítmica: matemática e suas tecnologias (ensino médio). São Paulo: Ed. do Brasil, 2020.

[78] LOURENÇO, Luiz Carlos de Brito. A economia brasileira, de Werner Baer. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre as Américas**, v. 3, n. 2, p. 71-78, 2009. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/repam/article/view/16095>. Acesso em: 4 set. 2021.

[79] MACÊDO, Álvaro Fabiano Pereira de. **Matemática financeira**. Mossoró: EdUFERSA, 2014.

[80] MARX, Karl. A mercadoria. In: ______. **O capital**. [S.l.: s.n., 20–?]. Parte 1, cap. 1. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ma000086.pdf>. Acesso em: 5 set. 2021.

[81] MARX, Karl; ENGELS, Friedrich. **Manifesto do partido comunista**. [S.l.: s.n.], 1888. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000042.pdf>. Acesso em: 5 set. 2021.

[82] MATEMÁTICA em toda parte: matemática nas finanças. Direção: Roberto Machado. [S.l.]: TV Escola, 2009. **YouTube**, Canal Matemática do Cotidiano, 22 jul. 2015. 1 vídeo (27 min 18 s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=5wswMJm1fdE>. Acesso em: 10 set. 2021.

[83] MATHIAS, Washington Franco; GOMES, Jóse Maria. **Matemática financeira com + de 600 exercícios resolvidos e propostos**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

[84] MICROSOFT. Auxílio e aprendizado do Excel. **Portal da Microsoft**, [2021?a]. Seção Suporte do Office. Disponível em: <https://support.microsoft.com/pt-br/excel>. Acesso em: 10 set. 2021.

[85] MICROSOFT. **Bem-vindo ao Excel**: fazer um tour. [S.l.], [2021?b]. 1 arquivo do Excel. Disponível em: <https://www.office.com/launch/excel?ui=pt-BR&rs=BR&auth=1>. Acesso em: 14 set. 2021.

[86] MICROSOFT. **Excel 2016 MSO 32 bits**. Versão 2109 (Build 16.0.14430.20154). [S.I]: 2016.

[87] MICROSOFT. **Portal do Microsoft Office**. [S.l.], 2021. Disponível em: <https://www.office.com/>. Acesso em: 10 set. 2021.

[88] MORAES, José Geraldo Vince de. **História**: geral e Brasil: volume único. São Paulo: Atual, 2003.

[89] MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e matemática financeira**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[90] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

[91] NARLOCH, Leandro. **Guia politicamente incorreto da história do Brasil**. São Paulo: Leya, 2011.

[92] NARLOCH, Leandro. **Guia politicamente incorreto da história do mundo**. São Paulo: Leya, 2013.

[93] NIGRO, Thiago. **Do mil ao milhão**: sem cortar o cafezinho. Rio de Janeiro: Harper Collins, 2018.

[94] OECD: ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT. **OECD/INFE international survey of adult financial literacy competencies**. Paris, 2016. Disponível em: <www.oecd.org/finance/OECD-INFE-International-Survey-of-Adult-Financial-Literacy-Competencies.pdf>. Acesso em: 10 set. 2021.

[95] OECD: ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT. **PISA 2015 results: students' financial literacy**. Paris, 2017. v. 4. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264270282-em>. Acesso em: 10 set. 2021.

[96] OECD: ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT. **PISA 2018 results: are students smart about money?**. Paris, 2020. v. 4. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/48ebd1ba-en>. Acesso em: 10 set. 2021.

[97] OLIVEIRA, Marcus Aldenisson de; MESQUITA, Ilka Miglio de; NASCIMENTO, Ester Fraga Vilas-Bôas Carvalho do. A trilogia Arithmetica, de Antônio Bandeira Trajano: um projeto inovador e modernizador para ensinar aritmética. **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, PR, v. 15, n. 1 (37), p. 201-234, jan./abr. 2015. Disponível em: <https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38915/pdf_53>. Acesso em: 6 set. 2021.

[98] PAIVA, Manoel. **Matemática**: ensino médio. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 1, parte 2.

[99] PAPMEM: PROGRAMA DE APERFEIÇOAMENTO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO, jan. 2014, Rio de Janeiro. Matemática financeira. Aula do prof. Augusto Morgado. **Youtube**, Canal Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 20 fev. 2015. 1 vídeo (1 h 11 min 52 s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=t5hDp2ZkeZw>. Acesso em: 4 set. 2021.

[100] PITON-GONÇALVES, Jean. A história da matemática comercial e financeira. **Só Matemática**, 2005. Seção História da Matemática. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>. Acesso em: 4 set. 2021.

[101] PROFMAT: MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL. Dissertações. **Portal PROFMAT**, [201-]. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 1º dez. 2020.

[102] PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática financeira**: objetiva e aplicada. 10.ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

[103] SANDRONI, Paulo (Org.). **Novíssimo dicionário de economia**. São Paulo: Best Seller, 1999. Disponível em: <http://www2.fct.unesp.br/docentes/geo/magaldi/GEO_ECONOMICA_2019/dicionario-de-economia-sandroni.pdf>. Acesso em: 4 set. 2021.

[104] SAS PLATAFORMA DE EDUCAÇÃO. **Raio X do Enem**: 2009 a 2020: assuntos mais cobrados no ENEM organizados por áreas do conhecimento e disciplinas. [S.l.], 2021. Disponível em: <http://sasedu.co/raioxenem2021>. Acesso em: 7 out. 2021.

[105] SERASA. **Mapa da inadimplência no Brasil**. [S.l.], maio 2021. Disponível em: <https://www.serasa.com.br/limpa-nome-online/blog/mapa-da-inadimplencia-no-brasil>. Acesso em: 4 set. 2021.

[106] SIMONSEN, Roberto C. **História econômica do Brasil**: 1500-1820. 4. ed. Brasília: Senado Federal, 2005. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/handle/id/1111>. Acesso em: 26 ago. 2021.

[107] SOUZA, Joamir Roberto de. **Contato matemática**: 3º ano. São Paulo: FTD, 2016.

[108] SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos matemática**: matemática financeira, gráficos e sistemas: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. São Paulo: FTD, 2020.

[109] SPC BRASIL: SERVIÇO DE PROTEÇÃO AO CRÉDITO BRASIL. Poupança ainda é o investimento mais escolhido pelos brasileiros, aponta levantamento CNDL/SPC Brasil. **Portal SPC Brasil**, 24 mar. 2020. Seção Índices Econômicos Disponível em: <https://www.spcbrasil.org.br/pesquisas/indice/7272>. Acesso em: 4 set. 2021.

[110] TALEB, Nassim Nicholas. **Anti-frágil**: coisas que se beneficiam com o caos. Rio de Janeiro: Objetiva, 2020.

[111] TORRALVO, Caio Fragata. Como constituir uma reserva de emergência adequada? **Portal Planejar**, 30 maio 2016. Disponível em: <https://planejar.org.br/artigo/como-constituir-uma-reserva-de-emergencia-adequada-2/>. Acesso em: 14 set. 2021.

[112] TRAJANO, Antonio. **Arithmetica elementar illustrada**. 76. ed. Rio de Janeiro: M. Araújo, 1907. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104081>. Acesso em: 6 set. 2021.

[113] UNICAMP: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. **Recursos educacionais multimídia para matemática do ensino médio**. Campinas, 2021. Resultado de busca com os termos: matemática financeira. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos?search=Matem%C3%A1tica%20financeira>. Acesso em 26 nov. 2021.

[114] VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil**: 1730-1930. São Paulo: ANNABLUME, 1999. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=rfsqnQod21wC&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_atb#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 6 set. 2021.

[115] VON MISES, Ludwig. **O cálculo econômico sob o socialismo**. Tradução: Leandro Augusto Gomes Roque. São Paulo: Instituto Ludwig von Mises Brasil, 2012. Disponível em: <https://www.mises.org.br/Ebook.aspx?id=66>. Acesso em: 26 set. 2021.

[116] WEB HP-12C emulator. **Portal da Universidade Estácio de Sá**, [2021a?]. Disponível em: <https://simulado.estacio.br/img/Hp/>. Acesso em: 4 set. 2021.

[117] WEB HP12C emulador. **Portal Account Contabilidade Didática**, [2021b?]. Disponível em: http://www.accountcontabilidade.com.br/hp12c/. Acesso em: 4 set. 2021.

[118] WEB HP12C emulator. **Portal Stendec**, [2021c?]. Disponível em: <https://stendec.io/ctb/hp12c.html>. Acesso em: 4 set. 2021.

[119] WEB HP-12C emulator. **Portal Tecnologia e Educação - Vichinsky**, [2021d?]. Disponível em: <https://www.vichinsky.com.br/hp12c/hp12c.php>. Acesso em: 4 set. 2021.

Apêndice A - Símbolos e notações

Utilizamos neste trabalho os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 do *sistema numérico decimal* "*hindu-arábico*", além dos caracteres e notações abaixo.

Figura 1: Tabela de símbolos matemáticos.

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
$+$	*mais*	$\in$	*pertence a*
$-$	*menos*	$\notin$	*não pertence a*
$.$	*vezes*	$\subset$	*está contido em*
$\div$ ou $/$	*dividido por*	$\not\subset$	*não está contido em*
$=$	*igual a*	$\supset$	*contém*
$\neq$	*diferente de*	$\not\supset$	*não contém*
$\cong$	*aproximadamente igual a*	$\cup$	*união*
$>$	*maior que*	$\cap$	*interseção*
$<$	*menor que*	$\times$	*produto cartesiano*
$\geq$	*maior que ou igual a*	$\mathbb{N}$	*conjunto dos números naturais*
$\leq$	*menor que ou igual a*	$\mathbb{Z}$	*conjunto dos números inteiros*
$\forall$	*para todo*	$\mathbb{Q}$	*conjunto dos números racionais*
$\exists$	*existe*	$\mathbb{I}$	*conjunto dos números irracionais*
$\nexists$	*não existe*	$\mathbb{R}$	*conjunto dos números reais*
$\mid$	*tal que*	$\Longrightarrow$	*implica*
$\lvert x\rvert$	*módulo ou valor absoluto de x*	$\Longleftrightarrow$	*equivale a*
$\lfloor x\rfloor$	*parte inteira de x*	$\sum$	*somatório*
x/y ou $\frac{x}{y}$	*fração x sobre y*	$\prod$	*produtório*
$\varnothing$ ou $\{\,\}$	*conjunto vazio*	∞	*infinito*

Observações:

- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ e $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1.a_2.a_3.\ldots.a_n$.
- Se a soma ou o produto acima tiver infinitos termos, substitui-se n por $+\infty$.
- Chaves, parêntese e colchetes em negrito denotam, respectivamente, conjuntos, sequências e intervalos de números reais (vide apêndices B, C e H). Em outras situações, estes símbolos não estão em negrito. Exemplo: $1-\big\{2+3\div\big[4-(5+6.7)\big]\big\}^8$.

Apêndice B - Conjuntos

Conjunto, *elemento* e *pertinência* são conceitos primitivos, isto é, não são definidos.

Intuitivamente, conjunto é um grupo qualquer de objetos (seus elementos).

Existe ainda o caso especial do conjunto sem elemento - o conjunto vazio: $\varnothing$.

Dado um conjunto A e um elemento x, há duas possibilidades: ou $x \in \mathrm{A}$ ou $x \notin \mathrm{A}$.

Um conjunto costuma ser representado listando os seus elementos ou caracterizando-os por meio de propriedades. Exemplo: $\mathrm{X} = \{\mathrm{a}\,;\,\mathrm{e}\,;\,\mathrm{i}\} = \{\text{vogais da palavra matemática}\}$.

Definimos $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff x \in \mathrm{B}, \forall x \in \mathrm{A}$ e $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B} \iff \exists\, x \in \mathrm{A} : x \notin \mathrm{B}$. Costuma-se dizer que A é *subconjunto* de B quando $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Exemplos: $\{\mathrm{a}\,;\,\mathrm{i}\} \subset \mathrm{X}$ e $\{\mathrm{a}\,;\,\mathrm{o}\} \not\subset \mathrm{X}$.

Para quaisquer conjuntos A, B, C temos $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$; $\varnothing \subset \mathrm{A}$; $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ e $\mathrm{B} \subset \mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$; $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ e $\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \iff \mathrm{A} = \mathrm{B}$. Esta última propriedade significa que dois conjuntos são iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos, não importando a ordem. Exemplo: $\{\mathrm{e}\,;\,\mathrm{i}\} = \{\mathrm{i}\,;\,\mathrm{e}\}$.

Conjuntos ordenados são ditos *sequências*. Para denotá-las, utilizamos parênteses em vez de chaves. Exemplo: $(\mathrm{e}\,;\,\mathrm{i}) \neq (\mathrm{i}\,;\,\mathrm{e})$.

Dados dois conjuntos A e B, temos as seguintes operações:

- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}$ (A união B);
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A} \text{ e } x \in \mathrm{B}\}$ (A interseção B);
- $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A} \text{ e } x \notin \mathrm{B}\}$ (A menos B);
- $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(x\,;y) \mid x \in \mathrm{A} \text{ e } y \in \mathrm{B}\}$ (A produto cartesiano B).

Se $\mathrm{X} = \{\mathrm{a}\,;\,\mathrm{e}\,;\,\mathrm{i}\}$ e $\mathrm{Y} = \{\mathrm{e}\,;\,\mathrm{i}\,;\,\mathrm{o}\}$ então $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \{\mathrm{a}\,;\,\mathrm{e}\,;\,\mathrm{i}\,;\,\mathrm{o}\}$, $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \{\mathrm{e}\,;\,\mathrm{i}\}$, $\mathrm{X} - \mathrm{Y} = \{\mathrm{a}\}$, $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \{(\mathrm{a};\mathrm{e});\, (\mathrm{a};\mathrm{i});\, (\mathrm{a};\mathrm{o});\, (\mathrm{e};\mathrm{e});\, (\mathrm{e};\mathrm{i});\, (\mathrm{e};\mathrm{o});\, (\mathrm{i};\mathrm{e});\, (\mathrm{i};\mathrm{i});\, (\mathrm{i};\mathrm{o})\}$.

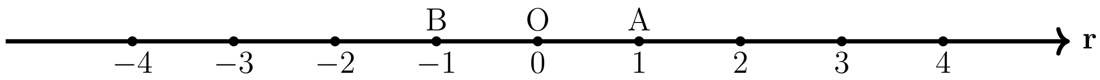
Entre as várias propriedades operacionais dos conjuntos, ressaltamos que a união e a interseção são comutativas ($\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$ e $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$, para quaisquer conjuntos A e B). Porém, a comutatividade não vale para a diferença nem para o produto cartesiano.

Apêndice C - Conjuntos numéricos

Definamos geometricamente os conjuntos numéricos a partir do estabelecimento da *reta real* e do conceito de comensurabilidade.

Tomemos uma reta $\mathbf{r}$, fixemos nela pontos O e A distintos e os associemos aos números 0 e 1, nesta ordem. O segmento OA corresponde à unidade de comprimento. Denotamos $\mathrm{O} = 0$ e $\mathrm{A} = 1$. O ponto $\mathrm{B} \in \mathbf{r}$ é simétrico ao ponto A se, e só se, for associado ao número -1, isto é, $\mathrm{B} = -1$. Assim, o ponto O divide $\mathbf{r}$ nas semirretas $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

Sejam C e D pontos de $\mathbf{r}$ associados aos números c e d, ou seja, $\mathrm{C} = c$ e $\mathrm{D} = d$. Temos $\mathrm{C} \in \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \{\mathrm{O}\}$ e $\mathrm{D} \in \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \{\mathrm{O}\}$ se, e somente se, $c > 0$ e $d < 0$.



A reta $\mathbf{r}$ construída acima é dita *reta real* porque todo número de $\mathbb{R}$ associa-se biunivocamente a um ponto de $\mathbf{r}$.

Dois segmentos de reta são comensuráveis quando existe um segmento que cabe uma quantidade exata de vezes em ambos. Caso contrário, os segmentos são incomensuráveis.

Seja $p \in \mathbb{R}$ associado ao ponto $\mathrm{P} \in \mathbf{r}$. Há apenas duas possibilidades: ou $p \in \mathbb{Q}$, quando OP e OA são comensuráveis, ou $p \in \mathbb{I}$, quando OP e OA são incomensuráveis. Temos ainda $p \in \mathbb{Z}$ se, e só se, OA cabe uma quantidade exata p de vezes em OP. Caso $p \in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{P} \in \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \{\mathrm{O}\}$, então $p \in \mathbb{N} = \{1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ ...\}$. Estas definições geométricas evidenciam que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemplos: $1/2 = 0{,}5 \in \mathbb{Q}$ (ponto médio de OA), $-1/9 = -0{,}111... \in \mathbb{Q}$ (simétrico da nona parte de OA), $\sqrt{2} \cong 1{,}41 \in \mathbb{I}$ (diagonal do quadrado de lado OA), $\pi \cong 3{,}14 \in \mathbb{I}$ (circunferência de diâmetro OA), $e \cong 2{,}718 \in \mathbb{I}$ (constante de Euler, que é definida como limite de $(1 + 1/t)^t$ quando t tende ao infinito, isto é, $\lim\limits_{t \to +\infty} (1 + 1/t)^t = e$).

Temos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} = [0;\ +\infty[$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\} =]-\infty; 0]$, $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\} =]0;\ +\infty[$, $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\} =]-\infty; 0[$.

Também podemos definir $\mathbb{N}$ pelos axiomas de Peano (vide Apêndice D), $\mathbb{Z}$ pela união disjunta $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{Q}$ por $\{m/n\,,\ \forall\,(m\,; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$.

Apêndice D - Princípio de Indução

Os “axiomas de Peano” que definem $\mathbb{N}$ são (1) Todo número natural n tem um só sucessor, que é $n+1$; (2) Números naturais distintos têm sucessores distintos; (3) O 1 é o único número natural que não é sucessor de outro; (4) Dado $\mathrm{X} \subset \mathbb{N}$, se $1 \in \mathrm{X}$ e se $n+1 \in \mathrm{X}$, para cada $n \in \mathrm{X}$, então $\mathrm{X} = \mathbb{N}$ (MORGADO, 2015).

O axioma (4) é o *Princípio de Indução Finita* (*PIF*). Ele fornece o eficiente método da *indução* ou *recorrência* para construir definições e demonstrar teoremas em $\mathbb{N}$. Enunciemo-lo em forma de propriedades:

> Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que
>
> i) $P(1)$ é válida;
>
> ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.
>
> Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ (MORGADO, 2015).

Exemplo 1: $\sum\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1$ e $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (definição de somatório).

Exemplo 2: $\prod\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1$ e $\prod\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right) . \, a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (definição de produtório).

Exemplo 3: $P(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} (2.k-1) = n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (propriedade de números ímpares).

i) $P(1)$ é válida porque $\sum\limits_{k=1}^{1} (2.k-1) = 2.1 - 1 = 1 = 1^2$ (base).

ii) Se $\sum\limits_{k=1}^{n} (2.k-1) = n^2$, com n escolhido arbitrariamente em $\mathbb{N}$ (hipótese), então

$\left[\sum\limits_{k=1}^{n} (2.k-1)\right] + (2.n+1) = n^2 + (2.n+1)$, donde $\sum\limits_{k=1}^{n} (2.k+1) = (n+1)^2$ (tese).

Exemplo 4: $(x+1)^n \geq 1 + n.x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$ em $\mathbb{R}$ (desigualdade de Bernoulli).

i) $P(1)$ é válida porque $(x+1)^1 = x+1 = 1+1.x$ (base).

ii) Supondo $(x+1)^n \geq 1 + n.x$, para um arbitrário $n \in \mathbb{N}$ (hipótese), temos

$(x+1)^n.(x+1) \geq (1+n.x).(x+1) \Longrightarrow (x+1)^{n+1} \geq x + n.x^2 + 1 + n.x \geq 1 + (n+1).x$ (tese).

Da desigualdade de Bernoulli, segue: $M(n) \geq M_s(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (subseção 2.4.4).

Apêndice E - Potências

Apresentamos neste apêndice uma sequência de definições e propriedades relativas à potenciação, que resumem as principais características desta operação.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, a potência de base x e expoente y é denotada por x^y. Ela é um número real, desde que x e y não sejam ambos nulos, que $x \neq 0\ \forall\, y < 0$ e que $x \geq 0\ \forall\, y \notin \mathbb{Z}$. Podemos definir esta operação em $\mathbb{R}$ tomando $x \in \mathbb{R}$ e as quatro premissas abaixo:

(E.1) $x^1 = x$ e $x^{n+1} = x^n.x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (definição por recorrência).

(E.2) $x^m.x^n = x^{m+n}$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ (propriedade fundamental).

(E.3) $x \neq 0 \Longrightarrow x^0 = 1$ e $x^{-1} = 1/x$ (definição de potências com expoentes 0 e -1).

(E.4) $x \geq 0 \Longrightarrow x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (defnição de radiciação).

De (E.1), concluímos que x^n é o produto de n fatores iguais a x (E.5). Daí, constatamos a validade de (E.2), pois os dois membros da igualdade correspondem ao produto de $m + n$ fatores iguais a x.

De (E.2), segue que $x^{m_1}.x^{m_2}.x^{m_3}. \ldots .x^{m_n} = x^{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}$, $\forall\, m_k \in \mathbb{N}$. Em particular, se $m_1 = m_2 = m_3 = \cdots = m_n = m$, então $(x^m)^n = x^{m.n}$ (E.6).

Respeitando-se as restrições iniciais, estende-se (E.2) para $m, n \in \mathbb{R}$ (LIMA et al, 2006a). Daí, (E.6) também é válida para quaisquer $m, n \in \mathbb{R}$. Aceitando esta validade, temos $x^{-n} = x^{-1.n} = [x^{-1}]^n = [1/x]^n = 1/x^n$ (E.7).

Por exemplo, $(1{,}1)^3 = (1{,}1)^2.(1{,}1) = (1{,}1).(1{,}1).(1{,}1) = 1{,}331$. Reciprocamente, $(1{,}331)^{1/3} = \sqrt[3]{(1{,}331)} = 1{,}1$. Além disto, como $(1{,}1)^{-1} = 1/(1{,}1)$, então $(1{,}1)^{-3} = [(1{,}1)^{-1}]^3 = [1/(1{,}1)]^3 = 1/(1{,}331)$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, ressaltamos mais dois resultados importantes da potenciação: $x > 1 \Longrightarrow x^{n+1} > x^n$ e $0 < x < 1 \Longrightarrow 0 < x^{n+1} < x^n$ (E.8).

Exemplificando, temos $(1{,}1) > 1 \Longrightarrow (1{,}1).(1{,}1)^{99} > 1.(1{,}1)^{99} \Longrightarrow (1{,}1)^{100} > (1{,}1)^{99}$ e $(0{,}1) < 1 \Longrightarrow (0{,}1).(0{,}1)^{99} < 1.(0{,}1)^{99} \Longrightarrow (0{,}1)^{100} < (0{,}1)^{99}$.

Apêndice F - Logaritmos

Apresentamos neste apêndice o básico sobre logaritmos. Para isto, iremos considerar que y, x, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ e que $y \neq 1$.

Definimos o logaritmo de x na base y igual ao expoente $z \in \mathbb{R}$ a que se deve elevar y, de modo que esta potência seja x, isto é, $\log_y x = z \iff y^z = x$ (F.1).

Desta definição decorre a propriedade fundamental dos logaritmos, que transforma produto em soma: $\log_y(x_1.x_2) = \log_y x_1 + \log_y x_2$ (F.2). Para prová-la, escrevamos $\log_y x_1 = p$ e $\log_y x_2 = q$, isto é, $y^p = x_1$ e $y^q = x_2$. Daí, temos $y^p.y^q = x_1.x_2 \iff y^{p+q} = x_1.x_2 \overset{(F.1)}{\iff} \log_y(x_1.x_2) = p + q = \log_y x_1 + \log_y x_2$.

Entre outras propriedades, temos as imediatas $\log_y 1 = 0$ (F.3) e $\log_y y = 1$ (F.4). Mas destacamos a seguinte: $\log_y x^n = n.\log_y x, \forall\, n \neq 0$ (F.5). De fato, $n.\log_y x = c \iff \log_y x = c/n \overset{(F.1)}{\iff} y^{c/n} = x \iff (y^{c/n})^n = x^n \iff y^c = x^n \overset{(F.1)}{\iff} \log_y x^n = c$.

Temos aqui um eficiente recurso para resolver $y^z = x$, na variável z. Por (F.1), obtemos imediatamente $z = \log_y x$. Equivalentemente, aplicando $\log_y$ aos dois membros da equação exponencial, temos $\log_y y^z = \log_y x$, donde, por (F.5), $z.\log_y y = \log_y x$, que, por (F.4), acarreta $z = \log_y x$.

Notações especiais: $\log x = \log_{10} x$ e $\ln x = \log_e x$, onde e é a constante de Euler.

Exemplo: $10^n = 2 \implies \log 10^n = \log 2 \implies n.\log 10 = \log 2 \implies n.1 \cong 0{,}301 \implies n \cong 0{,}301$. Observação: $\log 2 \cong 0{,}301$ pode ser obtido com uma calculadora científica ou uma tábua de logaritmos decimais, mas é interessante notar que $10^0 = 1 < 2 < 10 = 10^1$, que $10^{0,3} \cong 1{,}995 < 2 < 2{,}512 \cong 10^{0,4}$ e que $10^{0,301} \cong 1{,}99986 < 2 < 2{,}00447 \cong 10^{0,302}$.

Para um estudo mais completo dos logarítmos recomendamos Lima (2016).

Apêndice G - Funções

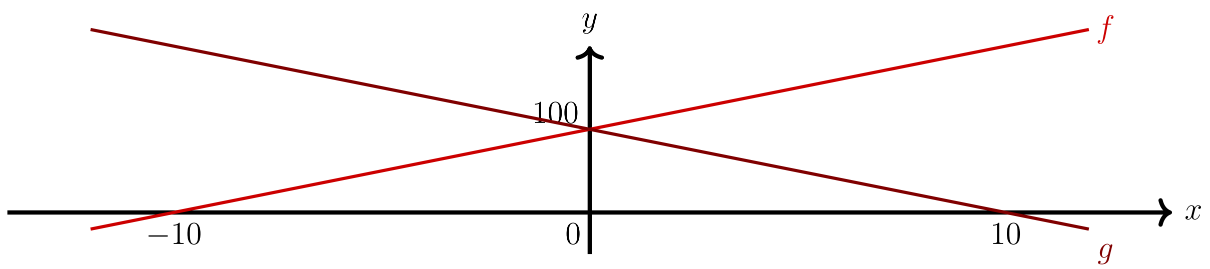
Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ (f de X em Y) é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in \mathrm{X}$ um elemento $y = f(x) \in \mathrm{Y}$ (LIMA et al, 2006a).

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *função polinomial do 1º grau* se $\exists\, A \in \mathbb{R}^*$ e $\exists\, B \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = A.x + B$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se $A > 0$ então f é crescente e seu gráfico é uma reta ascendente.

Se $A < 0$ então f é decrescente e seu gráfico é uma reta descendente.

Exemplos: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 10.x + 100$ e $g(x) = -10.x + 100$.



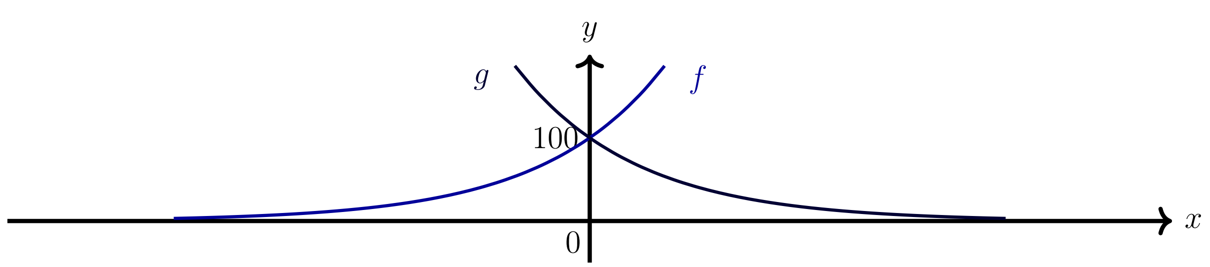
Quando $A, B \in \mathbb{R}$ e $f(x) = A.x + B$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, diz-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função afim.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *função exponencial* quando existem $C, D \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $f(x) = C.D^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se $D > 1$ então f é crescente e seu gráfico é uma curva exponencial ascendente.

Se $D < 1$ então f é decrescente e seu gráfico é uma curva exponencial descendente.

Exemplos: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 100.(1{,}1)^x$ e $g(x) = 100.(0{,}9)^x$.



Apêndice H - Progressões

Uma sequência $(a_n) = (a_1\,;\, a_2\,;\, a_3\,;\, ...)$ nada mais é do que um conjunto ordenado.

- (a_n) é **Progressão Aritmética** (**PA**) se $\exists\, r \in \mathbb{R} \mid a_{n+1} = a_n + r$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(TPA) $a_n = a_1 + r.(n-1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (provamos a seguir pelo *PIF* - Apêndice D).

Prova: (i) $a_1 = a_1 + r.(1-1)$;

(ii) $a_n = a_1 + r.(n-1) \Longrightarrow a_n + r = a_1 + r.(n-1) + r$

$\Longrightarrow a_{n+1} = a_1 + r.(n-1+1) = a_1 + r.((n+1)-1)$.

(SPA) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n.(a_1+a_n)}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (provamos a seguir pelo *PIF*).

Prova: (i) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \frac{1.(a_1+a_1)}{2}$;

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n.(a_1+a_n)}{2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = \frac{n.(a_1+a_n)}{2} + a_{n+1}$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \frac{n.(a_1+a_n)+2.a_{n+1}}{2} = \frac{n.(a_1+a_{n+1}-r)+a_{n+1}+a_{n+1}}{2}$

$= \frac{n.a_1+n.a_{n+1}-n.r+a_{n+1}+a_1+r.n}{2} = \frac{(n+1).a_1+(n+1).a_{n+1}}{2} = \frac{(n+1).(a_1+a_{n+1})}{2}$.

- (a_n) é **Progressão Geométrica** (**PG**) se $\exists\, q \in \mathbb{R} \mid a_{n+1} = a_n.q$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(TPG) $a_n = a_1.q^{(n-1)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (provamos a seguir pelo *PIF*).

Prova: (i) $a_1 = a_1.q^{(1-1)}$;

(ii) $a_n = a_1.q^{(n-1)} \Longrightarrow a_n.q = a_1.q^{(n-1)}.q$

$\Longrightarrow a_{n+1} = a_1.q^{(n-1+1)} = a_1.q^{((n+1)-1)}$.

(SPG) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$, $q \neq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (provamos a seguir pelo *PIF*).

Prova: (i) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = a_1.\left(\frac{1-q^1}{1-q}\right), q \neq 1$;

(ii) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right), q \neq 1$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = a_1.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + a_{n+1} = \frac{a_1-a_1.q^n}{1-q} + a_1.q^n$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \frac{a_1-a_1.q^n+a_1.q^n.(1-q)}{1-q} = \frac{a_1-a_1.q^{n+1}}{1-q} = a_1.\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$.

(SPG_∞) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q}$, $|q| < 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Prova: Se $|q| < 1$ e n cresce indefinidamente, então q^n tende a zero - consequência do item (E.8) do Apêndice E. Daí e de SPG, segue SPG_∞.

Apêndice I - Relação entre funções e progressões

Toda sequência numérica é uma função real de domínio discreto. Podemos definir a sequência (a_n) pela função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$.

Em particular, a função polinomial do 1º grau pode ser caracterizada por transformar PA em PA, assim como a função exponencial pode ser caracterizada por transformar PA em PG.

Seja uma PA qualquer (a_n) de razão r e sejam as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = A.x + B$ com $A \in \mathbb{R}^*$ e $B \in \mathbb{R}$, e $g(x) = C.D^x$, com $C, D \in \,]0; +\infty[$.

- Aplicando a função polinomial do 1º grau f ao termo geral da PA (a_n), temos:

  $f(a_n) = A.a_n + B \overset{\text{TPA}}{=} A.[a_1 + r.(n-1)] + B = (A.a_1 + B) + (A.r).(n-1)$.

  Este é o termo geral da PA $(f(a_n))$, com 1º termo $f(a_1) = A.a_1 + B$ e razão $A.r$.

  Exemplo: A função f, dada por $f(x) = 100.x + 10\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, transforma $(1\,;2\,;3\,;4\,;...)$ na PA $(110\,;120\,;130\,;140\,;...)$ de razão 10.

- Aplicando a função exponencial g ao termo geral da PA (a_n), temos:

  $g(a_n) = C.D^{a_n} \overset{\text{TPA}}{=} C.D^{[a_1 + r.(n-1)]} = C.D^{a_1}.(D^r)^{(n-1)}$.

  Este é o termo geral da PG $(g(a_n))$, com 1º termo $g(a_1) = C.D^{a_1}$ e razão D^r.

  Exemplo: A função g, dada por $g(x) = 100.(1{,}1)^x\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, transforma $(1\,;2\,;3\,;4\,;...)$ na PG $(110{,}00\,;121{,}00\,;133{,}10\,;146{,}41\,;...)$ de razão 1,1.

A consulta a este apêndice é, particularmente recomendada para a seção 2.4, que trata de juros simples e de juros compostos, pois eles se relacionam, respectivamente, com PA e com PG, bem como com a função polinomial do 1º grau e com a função exponencial.

Apêndice J - Capitalização contínua

Diferente das capitalizações composta e simples, em que os juros ocorrem ao final de cada período, na capitalização contínua, os juros ocorrem a cada instante infinitesimal.

Se 27% ao ano for capitalizada mensalmente, corresponde à taxa mensal $27\%/12 = 2{,}25\%$, que equivale à taxa anual $(1 + 2{,}25\%)^{12} - 1 \cong 30{,}605\%$.

Se 27% ao ano for capitalizada diariamente, corresponde à taxa diária $27\%/360 = 0{,}075\%$, que equivale à taxa anual $(1 + 0{,}075\%)^{360} - 1 \cong 30{,}983\%$.

Se 27% ao ano for capitalizada por hora, corresponde à taxa horária $27\%/8640 = 0{,}003125\%$, que equivale à taxa anual $(1 + 0{,}003125\%)^{8640} - 1 \cong 30{,}996\%$.

Em geral, 27% ao ano, capitalizada a cada período $p = (1 \text{ ano})/n$, equivale à taxa anual de juro $j = (1 + 27\%/n)^n - 1$.

A taxa nominal anual de 27% pode ser continuamente capitalizada mediante a taxa instantânea de juro i_{inst}, que é o limite de j quando n tende ao infinito ($n \to +\infty$). Denotamos: $i_{\text{inst}} = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + 27\%/n)^n - 1$.

Tomando $27\%/n = 1/t$, temos $n = t.27\%$. Logo, $n \to +\infty$ significa $t.27\% \to +\infty$ que, por sua vez, só é verdade se $t \to +\infty$. Portanto, $i_{\text{inst}} = \lim\limits_{t\to+\infty} (1 + 1/t)^{t.27\%} - 1 = \lim\limits_{t\to+\infty} \left[(1 + 1/t)^t\right]^{27\%} - 1 \overset{*}{=} e^{27\%} - 1 \cong 0{,}309964451 = 30{,}9964451\%$.

Como era de se esperar, os resultados anteriores (30,605%; 30,983%; 30,996%) se aproximam sucessivamente da taxa instantânea (i_{inst}).

Na passagem indicada por $*$, utilizamos a definição do número e citada no Apêndice C e propriedades básicas dos limites, presentes em Guidorizzi (2008).

Para generalizarmos a fórmula da taxa instantânea, basta tomarmos i em vez dos 27% ao ano. Assim, a taxa instantânea de juro equivalente à taxa i é $i_{\text{inst}} = e^i - 1$.

Pelo teorema **T-2.1**, sabemos que o capital C, à taxa de juro i, gera o montante $M(n) = C.(1 + i)^n$, em n períodos de i. Se esta taxa for capitalizada continuamente, será equivalente à taxa $i_{\text{inst}} = e^i - 1$. Logo, no mesmo prazo n, o montante desta capitalização contínua é $M_{cont}(n) = C.(1 + i_{\text{inst}})^n = C.(1 + e^i - 1)^n = C.e^{i.n}$.